Заключительная_Олимпиада - Группа 6+ - решения

1. МатеМаша написала на доске слово Геометрия. Затем она перенесла первые 4 буквы в конец и записала получившееся “слово”: етрияГеом. Затем она снова перенесла первые 4 буквы в конец и снова записала получившееся “слово”: “яГеометри”. Так она делала, пока снова не получила слово “Геометрия”. Сколько “слов”, кроме слов “Геометрия”, получилось записано на доске?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 8. (Выпишем получившуюся последовательность: Геометрия, етрияГеом, яГеометри, метрияГео, ияГеометр, ометрияГе, рияГеомет, еометрияГ, трияГеоме, Геометрия. Итого между двумя словами Геометрия записано 8 слов.)

2. У фермера Фёдора живут куры, гуси и кролики - всего 24 животных. Все гуси белые, а куры некоторые белые, а некоторые рябые. Кур 12, а кроликов 9. Всего белых животных 16. Белых кур на 3 больше, чем белых кроликов. Сколько рябых кур у Фёдора?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 4. (Посчитаем белых гусей: 24-12-9=3 гуся. По условию, все гуси - белые. Значит, белых кур и белых кроликов вместе 16-3=13.
По условию, белых кур на 3 больше, чем белых кроликов. А в сумме их 13. Временно вычтем 3 кур: 13-3=10. Остальных разделим пополам: 10=5+5. Значит, белых кроликов 5, а белых кур 5+3=8 . Таким образом, рябых кур 12-8=4.)

3. Поездка на такси от дома Наума Наумовича до аэропорта вместе с фиксированной платой за подачу машины стоит 127 рублей. Путь от дома до работы вдвое короче, и такая поездка с той же платой за подачу стоит 89 рублей. Чему равна плата за подачу такси?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 51. (Вычтем 127-89=38 рублей - это стоимость поездки на половину расстояния от дома до аэропорта (или от дома до работы) без платы за подачу машины. Значит, стоимость подачи машины составляет 89-38=51 рубль.)

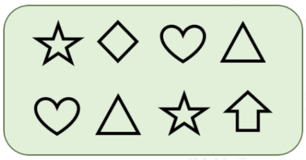
4. У семерых друзей дни рождения 12 марта, 19 апреля, 25 мая, 16 июня, 3 августа, 23 сентября и 20 ноября. Среди этих семерых Петя и Андрей, у которых каждый год дни рождения приходятся на один и тот же день недели. Отметьте дни рождения Пети и Андрея.
☐ 12 марта;

☐ 19 апреля;
☐ 25 мая;
☐ 16 июня;
☐ 3 августа;
☐ 23 сентября;
☐ 20 ноября.

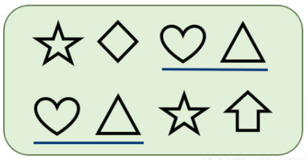
Ответ: 25 мая, 3 августа. (Начнём отсчёт от первой даты - 12 марта.
От неё до 19 апреля добавится 19+19=38 дней,
до 25 мая добавится 38+11+25=74 дня,
до 16 июня добавится 74+6+16=96 дней,
до 3 августа добавится 96+14+31+3=144 дня,
до 23 сентября добавится 144+28+23=195 дней,
до 20 ноября добавится 195+7+31+20=253 дня.
Две даты приходятся на один день недели, если от одной до другой даты проходит целое число недель, то есть к одной добавляется количество дней, кратное 7.
Заметим, что ни одно из чисел 38, 74, 96, 144, 195, 253 не делится на 7. Значит, на тот же день недели, что и 12 марта, не придётся ни одна из остальных дат.
Чтобы не делать такой же отсчёт для каждой даты, но узнать, между какими датами добавляет количество дней, кратное 7, достаточно посмотреть на остатки этих чисел при делении на 7: если числа имеют одинаковые остатки, то разница между ними делится на 7, то есть к одной дате добавляется число дней, кратное 7.
38 - остаток 3 при делении на 7;
74 - остаток 4 при делении на 7;
96 - остаток 5 при делении на 7;
144 - остаток 4 при делении на 7;
195 - остаток 6 при делении на 7;
253 - остаток 1 при делении на 7.
Числа 74 и 144 имеют одинаковые остатки - у обоих остаток 4. Значит, к третьей дате (25 мая) добавляется 144-74=70 дней (70 делится на 7), и получается дата 3 августа. Таким образом, на один день недели их перечисленных дат приходятся только 25 мая и 3 августа.)

5. ПрограМиша опять занялся шифрованием: каждую букву алфавита он заменяет на определённый знак. Какие два имени из списка зашифрованы на картинке?
☐ Дима;
☐ Гена;
☐ Боря;
☐ Нина;

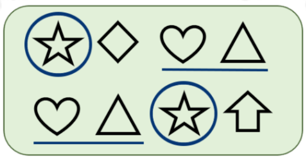
☐ Рита;
☐ Егор;
☐ Надя;
☐ Рома;
☐ Маша;
☐ Олег;
☐ Ярик;
☐ Таня;
☐ Глеб;
☐ Федя.



Ответ: Егор, Олег. (Заметим, что последние две буквы первого имени точно такие же, как и первые две буквы второго имени - они шифруются сердечком и треугольником (и стоят в том же порядке).



При этом у этих имён есть ещё одна одинаковая буква - первая у первого имени и третья у второго - звёздочка.



Для каждого имени из списка выпишем все имена, которые начинаются на такие же две буквы, как и заканчивается первое имя. В каждом случае будем проверять, есть ли совпадение ещё одной буквы.
Дима - Маша - нет совпадения первой и третьей букв;
Гена - Надя - нет совпадения первой и третьей букв;
Боря - X (нет имён, начинающихся на ДЯ);
Нина - Надя - нет совпадения первой и третьей букв;
Рита - Таня - нет совпадения первой и третьей букв;
Егор - X;
Надя - X;
Рома - Маша - нет совпадения первой и третьей букв;

Маша - Х;
Олег - Егор - первая буква первого имени совпадает с третьей буквой второго имени - О;
Ярик - Х;
Таня - Х;
Глеб - Х;
Федя - Х.
Подошла только пара Олег - Егор.)

6. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 50 и в записи которого есть хотя бы одна чётная цифра.
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 689999. (Сумма цифр числа 689999 равна 6+8+9+9+9+9=50 и в нём есть хотя бы одна чётная цифра (их там даже две: 6 и 8). Значит, это число подходит. Покажем, что это наименьшее число с такой суммой цифр, в записи которого есть хотя бы одна чётная цифра.
Если в числе меньше чем 6 цифр, то наибольшая возможная сумма цифр 9+9+9+9+9=45 - меньше чем 50. Значит, в числе должно быть хотя бы 6 цифр.
Если в шестизначном числе на первое место поставить цифру меньше чем 5, то есть 1, 2, 3 или 4, то наибольшая возможная сумма цифр будет 4+9+9+9+9+9=49 - меньше чем 50. Значит, число не менее чем шестизначное и первая цифра не менее 5.
Если на первое место поставить цифру 5, то сумма остальных цифр должна быть равна 50-5=45 - пятью цифрами такую сумму можно получить только так: 9+9+9+9+9=45. Значит, 599999 - наименьшее натуральное число с суммой цифр 50. Но в нём нет ни одной чётной цифры. Значит, и с цифры 5 нужное шестинаечное число начинаться не может.
Значит, первая цифра шестизначного числа не менее 6. Если на первом месте стоит цифра 6, то сумма остальных цифра должна быть 50-6=44. Такую сумму можно получить пятью цифрами только одним способом: 9+9+9+9+8. И чтобы число получилось наименьшим, эти цифры нужно расставить в порядке возрастания: 689999.)

7. В коробке лежит 50 игрушек: машинки, куклы и мячи. Машинок в 3 раза больше, чем кукол. Мячей меньше, чем машинок, но больше, чем кукол. Сколько мячей может быть в коробках?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 14, 18. (Разберём варианты, сколько могло быть кукол.
*Если кукол 0, то машинок 3*0=0. Тогда мячей 50-0-0=50 - не подходит.*
*Если кукол 1, то машинок 3*1=3. Тогда мячей 50-1-3=46 - не подходит.*
*Если кукол 2, то машинок 3*2=6. Тогда мячей 50-2-6=42 - не подходит.*

Если кукол 3, то машинок 3*3=9. Тогда мячей 50-3-9=38 - не подходит.
Если кукол 4, то машинок 3*4=12. Тогда мячей 50-4-12=34 - не подходит.
Если кукол 5, то машинок 3*5=15. Тогда мячей 50-5-15=30 - не подходит.
Если кукол 6, то машинок 3*6=18. Тогда мячей 50-6-18=26 - не подходит.
Если кукол 7, то машинок 3*7=21. Тогда мячей 50-7-21=22 - не подходит.
Если кукол 8, то машинок 3*8=24. Тогда мячей 50-8-24=18 - подходит, так как 8<18<24.
Если кукол 9, то машинок 3*9=27. Тогда мячей 50-9-27=14 - подходит, так как 9<14<27.
Если кукол 10, то машинок 3*10=30. Тогда мячей 50-10-30=10 - не подходит.
Если кукол 11, то машинок 3*11=33. Тогда мячей 50-11-33=6 - не подходит.
Если кукол 12, то машинок 3*12=36. Тогда мячей 50-12-36=2 - не подходит.
Варианты, когда кукол 13 или больше, не подходят, так как тогда кукол и машинок вместе не менее чем 13+3*13=52 - это больше чем 50.
Итак, подошли только два варианта: 8 кукол (и тогда мячей 18), 9 кукол (и тогда мячей 14).)

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились пять жителей острова: А, Б, В, Г и Д. Каждый сказал по фразе.
А: "Среди нас чётное число рыцарей."
Б: "Мы все рыцари."
В: "Среди нас не более двух рыцарей."
Г: "Среди нас нечётное число рыцарей."
Д: "Среди нас ровно один рыцарь."
Кто из них является рыцарем?
☐ А;
☐ Б;
☐ В;
☐ Г;
☐ Д;
☐ все пятеро лжецы.

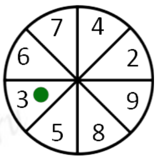
Ответ: А, В. (Заметим, что А и Г сказали фразы, из которых обязательно одна верная, другая неверная. Значит, среди них точно один рыцарь, а другой лжец (пока только неизвестно, что именно).
Но тогда фраза Б “Мы все рыцари” точно неверна - он лжец.
Д тоже не может быть рыцарем - если бы он был рыцарь, то рыцарей было бы минимум двое: он и один из А и Г, и тогда его фраза становится ложной. Значит, Д - лжец.
Итак, Б и Д - точно лжец, из А и Г один лжец и один рыцарь. Значит, среди А, Б, Г и Д ровно один рыцарь и 3 лжеца. Но тогда фраза В точно истинна - вместе с ним рыцарей точно не более двух. Значит, он рыцарь.

Получается, что всего рыцарей 2: В и кто-то один из А и Г. А так как 2 - чётное число, то правду сказал А - он рыцарь.
Получается, что А и В - рыцари, а остальные - лжецы.)

9. Круг разделен на 8 одинаковых секторов. В секторах по кругу написаны числа 3, 6, 7, 4, 2, 9, 8, 5 (именно в таком порядке). Фишка стоит на секторе с числом 3. За ход можно сдвинуть фишку на 1 или 2 шага в любую сторону (в какую-то одну). Каждый игрок записывает себе число, на котором он остановился. МатеМаша и ПрограМиша решили, что сделают по 5 ходов каждый, посчитают каждый сумму своих чисел, и выиграет тот, у кого сумма окажется больше. Первый ход выпал ПрограМише. На какое число ему надо сделать ход, чтобы гарантированно выиграть?

Замечание: Если игрок повторно возвращается на число, на котором он уже был, оно тоже записывается и учитывается в сумме.

☐ 6;
☐ 7;
☐ 4;
☐ 2;
☐ 9;
☐ 8;
☐ 5;
☐ у ПрограМиши нет такого первого хода, который гарантирует ему победу.



Ответ: 7. (Если ПрограМиша сделает ход на число 7, то потом МатеМаше будут доступны только ходы на числа 6, 3, 4, 2 - все эти числа меньше чем 7. После любого такого хода ПрограМиша сможет снова вернуться на число 7, и ситуация повторится. В этом случае ПрограМиша может играть, всё время возвращаясь на число 7, и у него будет записано число 7 пять раз, а у МатеМаши будут записаны пять чисел, каждое из которых меньше чем 7. Значит, сумма у ПрограМиши получится больше, и он выиграет. Таким образом, походив на число 7, а далее всё время снова возвращаясь на число 7 (он всегда сможет это сделать), ПрограМиша гарантированно обеспечит себе победу.
Покажем, что это единственный ход, при котором ПрограМиша может гарантировать себе победу. То есть покажем, что при любом другом первом ходе ПрограМиши МатеМаша имеет возможность выиграть.
Доступные первые ходы для ПрограМиши - это ходы на числа 6, 7, 5, 8. Если ПрограМиша походит на 6, то после этого МатеМаша может поставить фишку на 7, и тогда она сможет воспользоваться стратегией, которую мы разобрали для ПрограМиши: все пять раз возвращаться

на 7, а все числа ПрограМиши будут меньше чем 7, то есть выиграет МатеМаша.
Если же ПрограМиша первым ходом походит на 5 или 8, то после этого МатеМаша может поставить фишку на 9 и далее всё время возвращаться на 9. В этом случае у МатеМаши в итоге получатся пять чисел 9, а у ПрограМиши все числа будут меньше чем 9. Значит, и в этом случае МатеМаша может выиграть.)

10. У ПрограМиши есть 8 карточек с числами от 1 до 8 (по одной карточке с каждым числом). ПрограМиша решил называть набор карточек «заурядным», если в нём нет четырёх подряд идущих чисел. Например, набор карточек 1, 3, 5, 7 - “заурядный”, а набор 3, 4, 5, 6, 7, 8 - нет. Сколько всего «заурядных» наборов ПрограМиша может составить, используя эти восемь карточек?
Замечание: Набором считается любое количество карточек от 1 до 8. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

*Ответ: 207.(Сначала посчитаем, сколько всего наборов карточек можно составить из 8 карточек. Каждую карточку можно либо взять в набор, либо не брать, то есть два варианта для каждой из 8 карточек, то есть вариантов 2*2*2*2*2*2*2*2=256. Но это количество включает пустой набор, то есть непустых наборов 255.*
Теперь посчитаем количество наборов с 4 и более подряд идущими карточками. Ясно, что для наборов размером 1-3 карточки таких наборов нет.
Среди наборов из 4 карточек, наборов из 4 подряд идущих карточек 5: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678 - это всевозможные блоки из четырех подряд идущих карточек.
*Чтобы составить набор из 5 карточек, включающий блок из 4 подряд идущих карточек, есть 5 вариантов этого блока, и для каждого из этих блоков есть 4 варианта для пятой карточки, то есть всего 5*4=20. Но в этом случае дважды посчитаны варианты, когда, например, к набору 1234 добирается карточка 5, и когда к набору 2345 добирается карточка 1. То есть все наборы, включающие 5 подряд идущих карточек посчитаны дважды. Всего таких наборов 4. То есть уникальных наборов 20-4=16.*
Чтобы составить набор из 6 карточек, включающий блок из 4 подряд идущих карточек, есть 5 вариантов этого блока. К каждому из этих 5 вариантов нужно добрать 2 карточки. Рассмотрим отдельно случаи:
Когда набор содержит ровно 4 подряд идущие карточки. Для блоков 1234 и 5678 по 3 варианта добрать оставшиеся карточки. Для блоков 2345, 4567 и 3456 по 1 варианту. Всего 9 вариантов.
Когда набор содержит ровно 5 подряд идущих карточки. Блоков из 5 подряд идущих карточек 4. Для блоков 12345 и 45678 по 2 варианта добрать шестую карточку. Для двух остальных блоков есть только по одному варианту. То есть всего 6 вариантов.
И есть 3 варианта наборов из 6 подряд идущих карточек.
Таким образом, всего 9+6+3=18 наборов.
Всего наборов из 7 карточек 8. Оно все содержат 4 подряд идущие карточки.

И один набор из 8 карточек, он тоже содержит 4 подряд идущие карточки. Значит, примечательных наборов 255-5-16-18-8-1=207).