Заключительная_Олимпиада - 4 класс - решения

1. МатеМаша написала на доске слово Геометрия. Затем она перенесла первые 4 буквы в конец и записала получившееся “слово”: етрияГеом. Затем она снова перенесла первые 4 буквы в конец и снова записала получившееся “слово”: “яГеометри”. Так она делала, пока снова не получила слово “Геометрия”. Сколько “слов”, кроме слов “Геометрия”, получилось записано на доске?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 8. (Выпишем получившуюся последовательность: Геометрия, етрияГеом, яГеометри, метрияГео, ияГеометр, ометрияГе, рияГеомет, еометрияГ, трияГеоме, Геометрия. Итого между двумя словами Геометрия записано 8 слов.)

2. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 30.

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 3999. (Сумма цифр числа 3999 равна 3+9+9+9=30. Значит, это число подходит. Покажем, что это наименьшее число с такой суммой цифр.

Если в числе меньше чем 4 цифры, то наибольшая возможная сумма цифр 9+9+9=27 - меньше чем 30. Значит, в числе должно быть хотя бы 4 цифры.

Если в четырёхзначном числе на первое место поставить цифру меньше чем 3, то есть 1 или 2, то наибольшая возможная сумма цифр будет 2+9+9+9=29 - меньше чем 30. Значит, число не менее чем четырёхзначное и первая цифра не менее 3.

А если на первое место поставить цифру 3, то сумма остальных цифр должна быть равна 30-3=27 - тремя цифрами такую можно получить только так: 9+9+9=27. Значит, 3999 - наименьшее натуральное число с суммой цифр 30.)

3. У фермера Фёдора живут куры, гуси и кролики - всего 24 животных. Все гуси белые, а куры некоторые белые, а некоторые рябые. Кур 12, а кроликов 9. Всего белых животных 16. Белых кур на 3 больше, чем белых кроликов. Сколько рябых кур у Фёдора?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 4. (Посчитаем белых гусей: 24-12-9=3 гуся. По условию, все гуси - белые. Значит, белых кур и белых кроликов вместе 16-3=13.

По условию, белых кур на 3 больше, чем белых кроликов. А в сумме их 13. Временно вычтем 3 кур: 13-3=10. Остальных разделим пополам: 10=5+5. Значит, белых кроликов 5, а белых кур 5+3=8 . Таким образом, рябых кур 12-8=4.)

4. У семерых друзей дни рождения 12 марта, 19 апреля, 25 мая, 16 июня, 3 августа, 23 сентября и 20 ноября. Среди этих семерых Петя и Андрей, у которых каждый год дни рождения приходятся на один и тот же день недели. Отметьте дни рождения Пети и Андрея.

☐ 12 марта;
☐ 19 апреля;
☐ 25 мая;
☐ 16 июня;
☐ 3 августа;
☐ 23 сентября;
☐ 20 ноября.

Ответ: 25 мая, 3 августа. (Начнём отсчёт от первой даты - 12 марта.
От неё до 19 апреля добавится 19+19=38 дней,
до 25 мая добавится 38+11+25=74 дня,
до 16 июня добавится 74+6+16=96 дней,
до 3 августа добавится 96+14+31+3=144 дня,
до 23 сентября добавится 144+28+23=195 дней,
до 20 ноября добавится 195+7+31+20=253 дня.
Две даты приходятся на один день недели, если от одной до другой даты проходит целое число недель, то есть к одной добавляется количество дней, кратное 7.
Заметим, что ни одно из чисел 38, 74, 96, 144, 195, 253 не делится на 7. Значит, на тот же день недели, что и 12 марта, не придётся ни одна из остальных дат.
Чтобы не делать такой же отсчёт для каждой даты, но узнать, между какими датами добавляет количество дней, кратное 7, достаточно посмотреть на остатки этих чисел при делении на 7: если числа имеют одинаковые остатки, то разница между ними делится на 7, то есть к одной дате добавляется число дней, кратное 7.
38 - остаток 3 при делении на 7;
74 - остаток 4 при делении на 7;
96 - остаток 5 при делении на 7;
144 - остаток 4 при делении на 7;
195 - остаток 6 при делении на 7;
253 - остаток 1 при делении на 7.
Числа 74 и 144 имеют одинаковые остатки - у обоих остаток 4. Значит, к третьей дате (25 мая) добавляется 144-74=70 дней (70 делится на 7), и получается дата 3 августа. Таким образом, на один день недели их перечисленных дат приходятся только 25 мая и 3 августа.)

5. ПрограМиша опять занялся шифрованием: каждую букву алфавита он заменяет на определённый знак. Какие два имени из списка зашифрованы на картинке?

☐ Дима;
☐ Гена;
☐ Боря;
☐ Нина;
☐ Рита;
☐ Егор;
☐ Надя;
☐ Рома;
☐ Маша;
☐ Олег;
☐ Ярик;
☐ Таня;
☐ Глеб;
☐ Федя.

☆ ◇ ♡ △
♡ △ ☆ ⇧

Ответ: Егор, Олег. (Заметим, что последние две буквы первого имени точно такие же, как и первые две буквы второго имени - они шифруются сердечком и треугольником (и стоят в том же порядке).

☆ ◇ <u>♡ △</u>
<u>♡ △</u> ☆ ⇧

При этом у этих имён есть ещё одна одинаковая буква - первая у первого имени и третья у второго - звёздочка.

☆ ◇ <u>♡ △</u>
<u>♡ △</u> ☆ ⇧

Для каждого имени из списка выпишем все имена, которые начинаются на такие же две буквы, как и заканчивается первое имя. В каждом случае будем проверять, есть ли совпадение ещё одной буквы.
Дима - Маша - нет совпадения первой и третьей букв;
Гена - Надя - нет совпадения первой и третьей букв;
Боря - Х (нет имён, начинающихся на ДЯ);
Нина - Надя - нет совпадения первой и третьей букв;

Рита - Таня - нет совпадения первой и третьей букв;
Егор - Х;
Надя - Х;
Рома - Маша - нет совпадения первой и третьей букв;
Маша - Х;
Олег - Егор - первая буква первого имени совпадает с третьей буквой второго имени - О;
Ярик - Х;
Таня - Х;
Глеб - Х;
Федя - Х.
Подошла только пара Олег - Егор.)

6. Отгадайте ребус.

Замечание: В ответе укажите только слово.

2, 3, 4=Е, 1

Ответ: Треугольник. (На первой картинке изображено УТРО. Располагаем буквы в таком порядке: вторая, третья, четвертую букву заменяем на Е, и затем первая буква - получается ТРЕУ.
На второй картинке изображён ГОЛЬФ - без последней буквы получим ГОЛЬ.
На последней картинке изображено КИНО. У этого слова отброшена последняя буква (КИН) и оно перевернуто - получается НИК.
Вместе получается слово ТРЕУГОЛЬНИК.)

7. Император Тянь хочет украсить площадь перед дворцом статуями. Он собирается поставить статуи через равные промежутки по периметру прямоугольной площади, в том числе в углах. Какое минимальное количество статуй ему для этого понадобится, если размеры площади 48 на 64 метра?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 14. (Чтобы получить минимальное количество статуй, нужно определить, на какие максимальные равные промежутки можно поделить и 48 метров, и 64 метра.
Попробуем сторону 48 метров разделить на 1 участок в 48 метров. Но тогда 64 метра не получится поделить на такие же промежутки (64=48+16).

Попробуем сторону 48 метров разделить на 2 участка по 24 метра. Но тогда 64 метра тоже не получится поделить на такие же промежутки (64=24+24+16).
Попробуем сторону 48 метров разделить на 3 участка по 16 метров. В этом случае 64 метра можно разделить на такие же промежутки: 64=16+16+16+16.
Итак, минимальное количество статуй получается, если их ставить через каждый 16 метров. Тогда в углах будет 4 статуи, вдоль каждой из сторон в 48 метров будет ещё по 2 статуи, а вдоль сторон в 64 метра будет ещё по 3 статуи - всего 4+2+2+3+3=14 статуй.)

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились пять жителей острова: А, Б, В, Г и Д. Каждый сказал по фразе.
А: "Среди нас чётное число рыцарей."
Б: "Мы все рыцари."
В: "Среди нас не более двух рыцарей."
Г: "Среди нас нечётное число рыцарей."
Д: "Среди нас ровно один рыцарь."
Кто из них является рыцарем?
☐ А;
☐ Б;
☐ В;
☐ Г;
☐ Д;
☐ все пятеро лжецы.

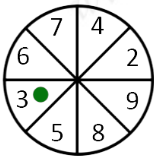
Ответ: А, В. (Заметим, что А и Г сказали фразы, из которых обязательно одна верная, другая неверная. Значит, среди них точно один рыцарь, а другой лжец (пока только неизвестно, что именно).
Но тогда фраза Б “Мы все рыцари” точно неверна - он лжец.
Д тоже не может быть рыцарем - если бы он был рыцарь, то рыцарей было бы минимум двое: он и один из А и Г, и тогда его фраза становится ложной. Значит, Д - лжец.
Итак, Б и Д - точно лжец, из А и Г один лжец и один рыцарь. Значит, среди А, Б, Г и Д ровно один рыцарь и 3 лжеца. Но тогда фраза В точно истинна - вместе с ним рыцарей точно не более двух. Значит, он рыцарь.
Получается, что всего рыцарей 2: В и кто-то один из А и Г. А так как 2 - чётное число, то правду сказал А - он рыцарь.
Получается, что А и В - рыцари, а остальные - лжецы.)

9. Круг разделен на 8 одинаковых секторов. В секторах по кругу написаны числа 3, 6, 7, 4, 2, 9, 8, 5

(именно в таком порядке). Фишка стоит на секторе с числом 3. За ход можно сдвинуть фишку на 1 или 2 шага в любую сторону (в какую-то одну). Каждый игрок записывает себе число, на котором он остановился. МатеМаша и ПрограМиша решили, что сделают по 5 ходов каждый, посчитают каждый сумму своих чисел, и выиграет тот, у кого сумма окажется больше. Первый ход выпал ПрограМише. На какое число ему надо сделать ход, чтобы гарантированно выиграть?

Замечание: Если игрок повторно возвращается на число, на котором он уже был, оно тоже записывается и учитывается в сумме.

☐ 6;
☐ 7;
☐ 4;
☐ 2;
☐ 9;
☐ 8;
☐ 5;
☐ у ПрограМиши нет такого первого хода, который гарантирует ему победу.



Ответ: 7. (Если ПрограМиша сделает ход на число 7, то потом МатеМаше будут доступны только ходы на числа 6, 3, 4, 2 - все эти числа меньше чем 7. После любого такого хода ПрограМиша сможет снова вернуться на число 7, и ситуация повторится. В этом случае ПрограМиша может играть, всё время возвращаясь на число 7, и у него будет записано число 7 пять раз, а у МатеМаши будут записаны пять чисел, каждое из которых меньше чем 7. Значит, сумма у ПрограМиши получится больше, и он выиграет. Таким образом, походив на число 7, а далее всё время снова возвращаясь на число 7 (он всегда сможет это сделать), ПрограМиша гарантированно обеспечит себе победу.

Покажем, что это единственный ход, при котором ПрограМиша может гарантировать себе победу. То есть покажем, что при любом другом первом ходе ПрограМиши МатеМаша имеет возможность выиграть.

Доступные первые ходы для ПрограМиши - это ходы на числа 6, 7, 5, 8. Если ПрограМиша походит на 6, то после этого МатеМаша может поставить фишку на 7, и тогда она сможет воспользоваться стратегией, которую мы разобрали для ПрограМиши: все пять раз возвращаться на 7, а все числа ПрограМиши будут меньше чем 7, то есть выиграет МатеМаша.

Если же ПрограМиша первым ходом походит на 5 или 8, то после этого МатеМаша может поставить фишку на 9 и далее всё время возвращаться на 9. В этом случае у МатеМаши в итоге получатся пять чисел 9, а у ПрограМиши все числа будут меньше чем 9. Значит, и в этом случае МатеМаша может выиграть.)

10. У ПрограМиши есть 8 карточек с числами от 1 до 8 (по одной карточке с каждым числом). ПрограМиша решил называть набор карточек «заурядным», если в нём нет четырёх подряд идущих чисел. Например, набор карточек 1, 3, 5, 7 - “заурядный”, а набор 3, 4, 5, 6, 7, 8 - нет. Сколько всего «заурядных» наборов ПрограМиша может составить, используя эти восемь карточек?

Замечание: Набором считается любое количество карточек от 1 до 8. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

*Ответ: 207.(Сначала посчитаем, сколько всего наборов карточек можно составить из 8 карточек. Каждую карточку можно либо взять в набор, либо не брать, то есть два варианта для каждой из 8 карточек, то есть вариантов 2*2*2*2*2*2*2*2=256. Но это количество включает пустой набор, то есть непустых наборов 255.*

Теперь посчитаем количество наборов с 4 и более подряд идущими карточками. Ясно, что для наборов размером 1-3 карточки таких наборов нет.

Среди наборов из 4 карточек, наборов из 4 подряд идущих карточек 5: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678 - это всевозможные блоки из четырех подряд идущих карточек.

*Чтобы составить набор из 5 карточек, включающий блок из 4 подряд идущих карточек, есть 5 вариантов этого блока, и для каждого из этих блоков есть 4 варианта для пятой карточки, то есть всего 5*4=20. Но в этом случае дважды посчитаны варианты, когда, например, к набору 1234 добирается карточка 5, и когда к набору 2345 добирается карточка 1. То есть все наборы, включающие 5 подряд идущих карточек посчитаны дважды. Всего таких наборов 4. То есть уникальных наборов 20-4=16.*

Чтобы составить набор из 6 карточек, включающий блок из 4 подряд идущих карточек, есть 5 вариантов этого блока. К каждому из этих 5 вариантов нужно добрать 2 карточки. Рассмотрим отдельно случаи:

Когда набор содержит ровно 4 подряд идущие карточки. Для блоков 1234 и 5678 по 3 варианта добрать оставшиеся карточки. Для блоков 2345, 4567 и 3456 по 1 варианту. Всего 9 вариантов.

Когда набор содержит ровно 5 подряд идущих карточки. Блоков из 5 подряд идущих карточек 4. Для блоков 12345 и 45678 по 2 варианта добрать шестую карточку. Для двух остальных блоков есть только по одному варианту. То есть всего 6 вариантов.

И есть 3 варианта наборов из 6 подряд идущих карточек.

Таким образом, всего 9+6+3=18 наборов.

Всего наборов из 7 карточек 8. Оно все содержат 4 подряд идущие карточки.

И один набор из 8 карточек, он тоже содержит 4 подряд идущие карточки.

Значит, примечательных наборов 255-5-16-18-8-1=207).