Заключительная_Олимпиада - Группа 6+ - решения

1. В санатории "Райский уголок" на полдник дают или морс, или компот, а в некоторые дни есть и то, и другое на выбор. ПрограМиша и МатеМаша одновременно отдыхали в этом санатории 10 дней. ПрограМиша больше любит морс, он смог пить его 4 дня за время отдыха. При этом 2 дня были и морс, и компот. А МатеМаша больше любит компот. Сколько за время отдыха было дней, когда МатеМаша могла пить компот?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 8. (Из 10-ти дней 2 дня были и компот, и морс на выбор. А 4 дня ПрограМиша мог выбрать морс. Значит, остальные 10-4=6 дней был только компот. Значит, всего дней, когда МатеМаша могла пить компот, было 2+6=8.)

2. Вдоль края прямой аллеи установлено 5 скамеек. Длина каждой скамейки 2 метра, а расстояние от конца одной скамейки до начала следующей - 7 метров. На самое начало первой скамейки села муха, а на самый конец последней сел комар. Какое расстояние между мухой и комаром?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 38. (Расстояние между мухой и комаром - это длины 5-ти скамеек (2+2+2+2+2=10 метров) и 4 промежутка между этими скамейками (7+7+7+7=28 метров). Значит, между мухой и комаром 10+28=38 метров.)

3. На листе бумаги в ряд написано 30 натуральных чисел. Известно, что сумма любых двух соседних чисел - чётная, а сумма любых трёх чисел подряд - нечётная. Сколько на листе чётных чисел?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 0. (Заметим, что если два числа оба чётные, то их сумма чётна, если оба нечётные, то сумма тоже чётная, а если одно из чисел чётное, а другое нечётное, то их сумма нечётна.
Рассмотрим первые два числа в ряду. Их сумма чётна. А если к этой чётной сумме прибавить ещё и третье число, то сумма должна получиться нечётной. Значит, третье число нечётное.
При этом сумма второго и третьего чисел чётная, а первого, второго и третьего - нечётная. Значит, и первое число нечётное. Но тогда и вторoе число тоже нечётное, так как сумма его с первым (нечётным) числом - чётная.
Итак, первые три числа в ряду нечётные. Но тогда четвёртое число тоже нечётное, так как сумма

третьего и четвёртого чётная, а третье число нечётное. Аналогично получаем, что и пятое число нечётное, и шестое, и так далее до последнего числа. Заметим, что в этом случае все условия задачи выполняются. Получается, что все числа в ряду нечётные, то есть на листе 0 чётных чисел.)

4. Михаилу Владимировичу сегодня исполнилось 34 года. У него есть трое сыновей, которым сейчас 1, 3 и 8 лет. Через сколько лет в день рождения Михаила Владимировича его возраст станет равен сумме возрастов его троих сыновей?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

*Ответ: 11. (Пусть это случится через X лет. В этот момент Михаилу Владимировичу исполнится 34+X лет. А сумма возрастов его детей будет равна (1+X)+(3+X)+(8+X) лет, то есть 12+3*X лет. Получается, что 34+X=12+3*X, значит, 2*X=22, то есть X=11. Получается, что через 11 лет возраст Михаила Владимировича будет равен сумме возрастов его сыновей.)*

5. Какое наименьшее количество последовательных двузначных чисел нужно перемножить, чтобы произведение делилось на 2024?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

*Ответ: 3. (Разложим 2024 на простые множители: 2024=2*2*2*11*23.*
*Рассмотрим произведение трёх чисел 22*23*24=2*11*23*3*2*2*2=2024*2*3 - делится на 2024.*
Значит, три последовательных числа могут быть. Докажем, что двух чисел недостаточно.
*Пусть произведение двузначных чисел делится на 2024. Тогда хотя бы одно из двузначных чисел должно делиться на 23 и хотя бы одно на 11. Все двузначные числа, делящиеся на 23 - это 23, 46, 69 и 92. Но ни одно из них не делится на 11, а рядом с числами 46, 69 и 92 нет числа, делящегося на 11. Значит, только произведение 22*23 делится и на 23, и на 11. Но оно не делится на 2024.*
Значит, наименьшее количество последовательных двузначных чисел, которые нужно перемножить - три.)

6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В баскетбольной команде на этом острове всегда ровно 5 игроков. Перед игрой всем игрокам одной команды выдали номера от 1 до 5, которые игроки закрепили на футболках. Известно, что игроки с нечётными номерами - рыцари, а с чётными - лжецы. После игры каждый из них сказал: "Я попал мячом в корзину столько раз, какой номер у меня на футболке". Всего у этой команды было ровно 14 попаданий за игру. Сколько раз попал в корзину игрок №4, если известно, что у него было больше

попаданий, чем у №2?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 5. (Так как игроки с нечётными номерами (1, 3, и 5) - рыцари, то они действительно попали в корзину столько раз, сколько написано на их футболках. А в сумме у них было 1+3+5=9 попаданий. Значит, у игроков №2 и №4 в сумме было 14-9=5 попаданий. При этом у №2 попаданий было меньше, чем у №4. Перечислим все способы, как может получиться сумма 5. При этом первое слагаемое - это будут попадания №2, а второе - попадания №4 (то есть первое слагаемое будет меньше второго):
5=0+5;
5=1+4;
5=2+3.
Но во втором варианте 5=1+4 получается, что у №4 ровно 4 попадания, то есть количество попаданий совпадает с номером на футболке. Но он лжец, то есть такого не может быть.
В последнем случае 5=2+3 слова №2 окажутся правдой. Но он тоже лжец, то есть такое тоже невозможно.
Остаётся только вариант 5=0+5, то есть у №2 было 0 попаданий, а у №4 - 5 попаданий. Это вариант удовлетворяет всем условиям задачи.)

7. Большой куб составлен из маленьких одинаковых кубиков. При этом маленьких кубиков, которые касаются других кубиков ровно 4-мя гранями, 72 штуки. Из скольки маленьких кубиков состоит большой куб?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 512. (Маленькие кубики, из которых составлен большой куб, могут находиться на поверхности - на углах, вдоль рёбер, на гранях - или в глубине.
Кубики, которые находятся в глубине, касаются других кубиков всеми 6-ю своими гранями.
Кубики, которые находятся на поверхности в углах, касаются других кубиков только 3-мя гранями.

Кубики, которые находятся на гранях (на поверхности, но не на ребрах и не в углах), касаются других 5-ю гранями.
*А кубики на поверхности вдоль рёбер (но не в углах) касаются других кубиков 4-мя гранями. Всего рёбер у большого куба 12. Поэтому, так как таких кубиков всего 72, то получается, что вдоль каждого ребра по 72:12=6 таких кубиков. Но так как ребро состоит ещё и из двух угловых кубиков, то полный размер ребра - 6+2=8 кубиков. Получается, что ребро большого куба состоит из 8-ми кубиков. Значит, весь куб состоит из 8*8*8=512 маленьких кубиков.)*

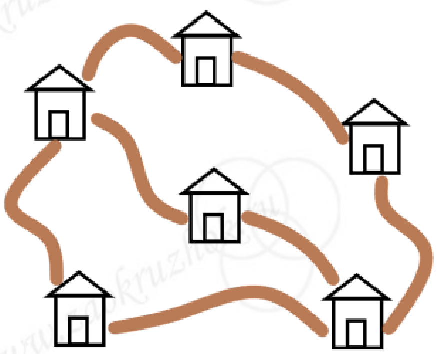
8. У ПрограМиши есть два игральных кубика с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 на гранях. Причём числа на обоих кубиках расположены так, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7. ПрограМиша склеил эти два кубика какими-то двумя гранями, а потом 4 раза бросил эту конструкцию. Все 4 раза она упала двойной гранью вверх. В первый раз сумма двух верхних чисел была равна 5, второй раз - 6, третий раз - 9. В четвёртый раз сумма отличалась от всех предыдущих. Чему она была равна?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

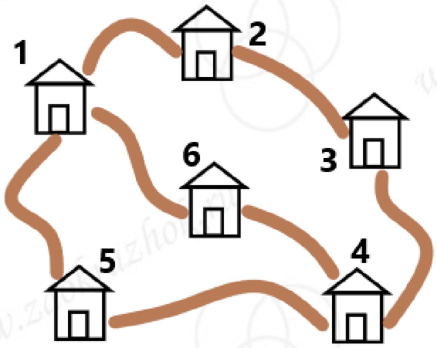
Ответ: 8. (У конструкции, полученной склеиванием двух кубиков, ровно 4 двойных грани. Поскольку за 4 броска выпадали разные суммы, то каждая из двойных граней выпала ровно по одному разу.
Значит, в общую сумму всех выпавших чисел за все 4 броска войдут все числа на двойных гранях - это числа на всех гранях исходных кубиков, кроме чисел на склеенных гранях и противоположных им.
Общая сумма чисел на одном исходном кубике равна 1+2+3+4+5+6=21. Поскольку суммы чисел на противоположных гранях кубиков везде равны 7, то сумма чисел на склеенной грани первого кубика и противоположной ей равна 7. Значит, сумма остальных четырёх чисел первого кубика равна 21-7=14.
На втором кубике сумма чисел на всех гранях, кроме склеенной и противоположной ей, тоже равна 21-7=14.
Значит, общая сумма всех выпавших за 4 броска чисел равна 14+14=28.
За первые три броска в сумме выпало 5+6+9=20 очков. Значит, в последнем броске выпало 28-20=8 очков.)

9. В деревне Залесье всего 6 домов. Некоторые дома соединены друг с другом дорожками. У жителей есть краски 3 цветов: красная, синяя и зелёная. Жители хотят покрасить дома так, чтобы каждый дом был какого-то одного цвета и никакие два дома, между которыми есть дорожка, не были одинакового цвета. Сколькими способами жители могут покрасить дома?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 42. (Для удобства пронумеруем домики:



Начнём окрашивание домиков с дома №1. Его можно покрасить 3-мя способами. Домик №4 тоже можно покрасить 3-мя способами.
Рассмотрим два случая.
*Если домики №1 и №4 одного цвета (3 варианта), то для каждого из этих способов есть по 2 способа покрасить дома №5 и №6, а также 2 способа покрасить домики №2 и №3. Итого 3*2*2*2=24 способа.*
*Если дома №1 и №4 разных цветов (3*2=6 вариантов), то в каждом из этих вариантов дома №5 и №6 можно покрасить единственным образом (оставшимся цветом), а дома №2 и №3 тремя способами. Итого 6*1*3=18 способов.*
Итого получается 24+18=42 способа.)

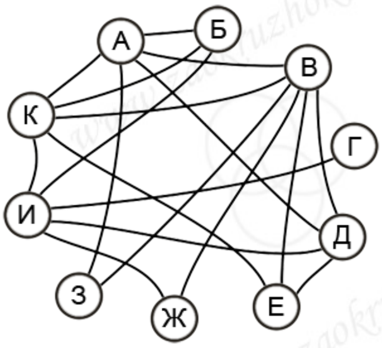
10. У МатеМаши есть 10 карточек, на каждой из которых по четыре цифры. МатеМаша разбила все карточки на 5 пар так, что в каждой паре на карточках ровно одна общая цифра. С какой из карточек могла оказаться в паре карточка К?

☐ А;
☐ Б;
☐ В;
☐ Г;
☐ Д;
☐ Е;
☐ Ж;
☐ З;
☐ И.

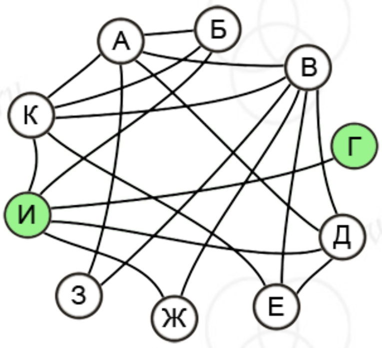
А		Б		В		Г		Д	
2	8	4	7	8	6	8	7	0	7
9	4	6	5	7	5	1	4	3	4

Е		Ж		З		И		К	
6	1	7	4	0	4	6	0	0	1
4	9	1	9	1	7	9	8	7	2

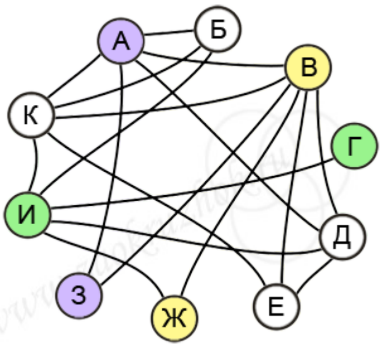
Ответ: Б. (Соединим линиями те карточки, на которых ровно одна общая цифра, то есть которые можно объединить в пары:



На схеме видно, что карточка Г может быть в паре только с карточкой И - отложим эту пару.



Теперь получается, что для карточки Ж, которая могла быть в паре с В или с И, остаётся только один вариант пары - карточка В. И тогда пара для З - это только А.



Остались только карточки Б, Д, Е и К. Из них получаются только пары Д-Е и Б-К.)