



Заключительная_Олимпиада - 5 класс - решения

1. В санатории "Райский уголок" на полдник дают или морс, или компот, а в некоторые дни есть и то, и другое на выбор. ПрограМиша и МатеМаша одновременно отдыхали в этом санатории 10 дней. ПрограМиша больше любит морс, он смог пить его 4 дня за время отдыха. При этом 2 дня были и морс, и компот. А МатеМаша больше любит компот. Сколько за время отдыха было дней, когда МатеМаша могла пить компот?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 8. (Из 10-ти дней 2 дня были и компот, и морс на выбор. А 4 дня ПрограМиша мог выбрать морс. Значит, остальные $10-4=6$ дней был только компот. Значит, всего дней, когда МатеМаша могла пить компот, было $2+6=8$.)

2. Вдоль края прямой аллеи установлено 5 скамеек. Длина каждой скамейки 2 метра, а расстояние от конца одной скамейки до начала следующей - 7 метров. На самое начало первой скамейки села муха, а на самый конец последней сел комар. Какое расстояние между мухой и комаром?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 38. (Расстояние между мухой и комаром - это длины 5-ти скамеек ($2+2+2+2+2=10$ метров) и 4 промежутка между этими скамейками ($7+7+7+7=28$ метров). Значит, между мухой и комаром $10+28=38$ метров.)

3. На листе бумаги в ряд написано 30 натуральных чисел. Известно, что сумма любых двух соседних чисел - чётная, а сумма любых трёх чисел подряд - нечётная. Сколько на листе чётных чисел?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 0. (Заметим, что если два числа оба чётные, то их сумма чётна, если оба нечётные, то сумма тоже чётная, а если одно из чисел чётное, а другое нечётное, то их сумма нечётна.

Рассмотрим первые два числа в ряду. Их сумма чётна. А если к этой чётной сумме прибавить ещё и третье число, то сумма должна получиться нечётной. Значит, третье число нечётное.

При этом сумма второго и третьего чисел чётная, а первого, второго и третьего - нечётная. Значит, и первое число нечётное. Но тогда и второе число тоже нечётное, так как сумма его с первым (нечётным) числом - чётная.

Итак, первые три числа в ряду нечётные. Но тогда четвёртое число тоже нечётное, так как сумма





третьего и четвёртого чётная, а третье число нечётное. Аналогично получаем, что и пятое число нечётное, и шестое, и так далее до последнего числа. Заметим, что в этом случае все условия задачи выполняются. Получается, что все числа в ряду нечётные, то есть на листе 0 чётных чисел.)

4. Красные, зелёные и голубые автобусы приезжают на остановку каждые 2, 3 и 5 минут соответственно. Сколько раз с 12:00 до 17:30 автобусы всех трёх цветов приезжали одновременно на остановку, если в 14:18 все три автобуса стояли на остановке?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 11. (Все три автобуса приезжают на остановку каждые $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ минут. Если они были одновременно на остановке в 14:18, то до этого они приезжали вместе в 13:48, 13:18, 12:48, 12:18, а после - в 14:48, 15:18, 15:48, 16:18, 16:48, 17:18. Всего 11 раз.)

5. Михаилу Владимировичу сегодня исполнилось 34 года. У него есть трое сыновей, которым сейчас 1, 3 и 8 лет. Через сколько лет в день рождения Михаила Владимировича его возраст станет равен сумме возрастов его троих сыновей?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 11. (Пусть это случится через X лет. В этот момент Михаилу Владимировичу исполнится $34+X$ лет. А сумма возрастов его детей будет равна $(1+X)+(3+X)+(8+X)$ лет, то есть $12+3 \cdot X$ лет. Получается, что $34+X=12+3 \cdot X$, значит, $2 \cdot X=22$, то есть $X=11$. Получается, что через 11 лет возраст Михаила Владимировича будет равен сумме возрастов его сыновей.)

6. Какое наименьшее количество последовательных двузначных чисел нужно перемножить, чтобы произведение делилось на 2024?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 3. (Разложим 2024 на простые множители: $2024=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$.

Рассмотрим произведение трёх чисел $22 \cdot 23 \cdot 24=2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=2024 \cdot 2 \cdot 3$ - делится на 2024.

Значит, три последовательных числа могут быть. Докажем, что двух чисел недостаточно.

Пусть произведение двузначных чисел делится на 2024. Тогда хотя бы одно из двузначных чисел должно делиться на 23 и хотя бы одно на 11. Все двузначные числа, делящиеся на 23 - это 23, 46, 69 и 92. Но ни одно из них не делится на 11, а рядом с числами 46, 69 и 92 нет числа, делящегося



на 11. Значит, только произведение $22 \cdot 23$ делится и на 23, и на 11. Но оно не делится на 2024. Значит, наименьшее количество последовательных двузначных чисел, которые нужно перемножить - три.)

7. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В баскетбольной команде на этом острове всегда ровно 5 игроков. Перед игрой всем игрокам одной команды выдали номера от 1 до 5, которые игроки закрепили на футболках. Известно, что игроки с нечётными номерами - рыцари, а с чётными - лжецы. После игры каждый из них сказал: "Я попал мячом в корзину столько раз, какой номер у меня на футболке". Всего у этой команды было ровно 14 попаданий за игру. Сколько раз попал в корзину игрок №4, если известно, что у него было больше попаданий, чем у №2?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 5. (Так как игроки с нечётными номерами (1, 3, и 5) - рыцари, то они действительно попали в корзину столько раз, сколько написано на их футболках. А в сумме у них было $1+3+5=9$ попаданий. Значит, у игроков №2 и №4 в сумме было $14-9=5$ попаданий. При этом у №2 попаданий было меньше, чем у №4. Перечислим все способы, как может получиться сумма 5. При этом первое слагаемое - это будут попадания №2, а второе - попадания №4 (то есть первое слагаемое будет меньше второго):

$$5=0+5;$$

$$5=1+4;$$

$$5=2+3.$$

Но во втором варианте $5=1+4$ получается, что у №4 ровно 4 попадания, то есть количество попаданий совпадает с номером на футболке. Но он лжец, то есть такого не может быть.

В последнем случае $5=2+3$ слова №2 окажутся правдой. Но он тоже лжец, то есть такое тоже невозможно.

Остаётся только вариант $5=0+5$, то есть у №2 было 0 попаданий, а у №4 - 5 попаданий. Это вариант удовлетворяет всем условиям задачи.)

8. У ПрограМиши есть два игральных кубика с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 на гранях. Причём числа на обоих кубиках расположены так, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7. ПрограМиша склеил эти два кубика какими-то двумя гранями, а потом 4 раза бросил эту конструкцию. Все 4 раза она упала двойной гранью вверх. В первый раз сумма двух верхних чисел была равна 5, второй раз - 6, третий раз - 9. В четвёртый раз сумма отличалась от всех предыдущих. Чему она была равна?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).





Ответ: 8. (У конструкции, полученной склеиванием двух кубиков, ровно 4 двойных грани. Поскольку за 4 броска выпадали разные суммы, то каждая из двойных граней выпала ровно по одному разу.

Значит, в общую сумму всех выпавших чисел за все 4 броска войдут все числа на двойных гранях - это числа на всех гранях исходных кубиков, кроме чисел на склеенных гранях и противоположных им.

Общая сумма чисел на одном исходном кубике равна $1+2+3+4+5+6=21$. Поскольку суммы чисел на противоположных гранях кубиков везде равны 7, то сумма чисел на склеенной грани первого кубика и противоположной ей равна 7. Значит, сумма остальных четырёх чисел первого кубика равна $21-7=14$.

На втором кубике сумма чисел на всех гранях, кроме склеенной и противоположной ей, тоже равна $21-7=14$.

Значит, общая сумма всех выпавших за 4 броска чисел равна $14+14=28$.

За первые три броска в сумме выпало $5+6+9=20$ очков. Значит, в последнем броске выпало $28-20=8$ очков.)

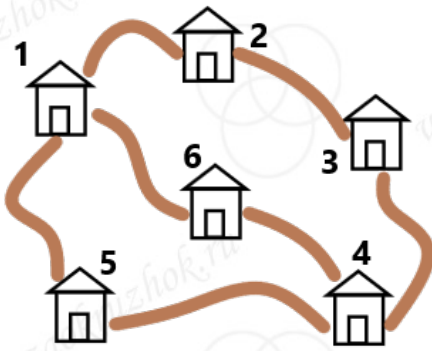
9. В деревне Залесье всего 6 домов. Некоторые дома соединены друг с другом дорожками. У жителей есть краски 3 цветов: красная, синяя и зелёная. Жители хотят покрасить дома так, чтобы каждый дом был какого-то одного цвета и никакие два дома, между которыми есть дорожка, не были одинакового цвета. Сколькими способами жители могут покрасить дома?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 42. (Для удобства пронумеруем домики:





Начнём окрашивание домиков с дома №1. Его можно покрасить 3-мя способами. Домик №4 тоже можно покрасить 3-мя способами.

Рассмотрим два случая.

Если домики №1 и №4 одного цвета (3 варианта), то для каждого из этих способов есть по 2 способа покрасить дома №5 и №6, а также 2 способа покрасить домики №2 и №3. Итого $3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ способа.

Если дома №1 и №4 разных цветов ($3 \cdot 2 = 6$ вариантов), то в каждом из этих вариантов дома №5 и №6 можно покрасить единственным образом (оставшимся цветом), а дома №2 и №3 тремя способами. Итого $6 \cdot 1 \cdot 3 = 18$ способов.

Итого получается $24 + 18 = 42$ способа.)

10. У МатеМаши есть 10 карточек, на каждой из которых по четыре цифры. МатеМаша разбила все карточки на 5 пар так, что в каждой паре на карточках ровно одна общая цифра. С какой из карточек могла оказаться в паре карточка К?

- А;
- Б;
- В;
- Г;
- Д;
- Е;
- Ж;
- З;
- И.

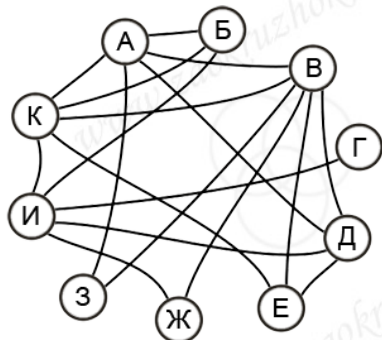




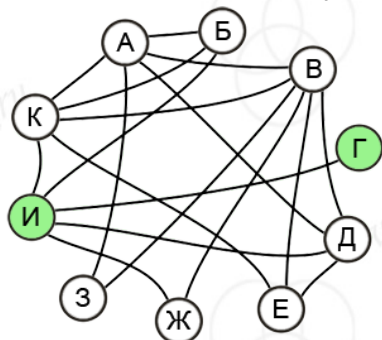
А	Б	В	Г	Д
2 8	4 7	8 6	8 7	0 7
9 4	6 5	7 5	1 4	3 4

Е	Ж	З	И	К
6 1	7 4	0 4	6 0	0 1
4 9	1 9	1 7	9 8	7 2

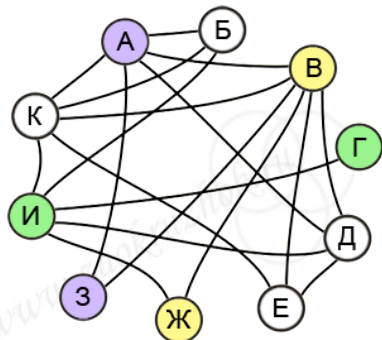
Ответ: Б. (Соединим линиями те карточки, на которых ровно одна общая цифра, то есть которые можно объединить в пары:



На схеме видно, что карточка Г может быть в паре только с карточкой И - отложим эту пару.



Теперь получается, что для карточки Ж, которая могла быть в паре с В или с И, остаётся только один вариант пары - карточка В. И тогда пара для З - это только А.





**ЗАОЧНЫЙ КРУЖОК
по математике**
при Санкт-Петербургском Губернаторском
физико-математическом лицее №30



Заключительная_Олимпиада
а - 5 класс



Остались только карточки Б, Д, Е и К. Из них получаются только пары Д-Е и Б-К.)

