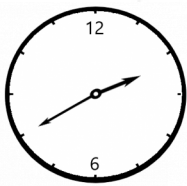




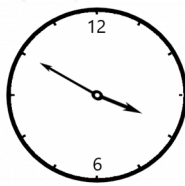
Заключительная_Олимпиада - Группа 6+ - решения

1. МатеМаше подарили необычные стрелочные часы - стрелки этих часов движутся в обратную сторону. В 3:50 МатеМаша посмотрела на часы. Что она увидела?

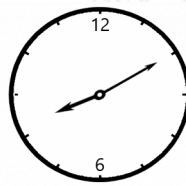
- А;
- Б;
- В;
- Г.



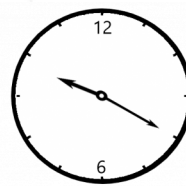
А



Б

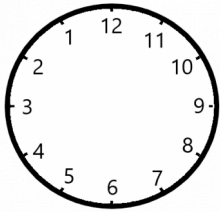


В



Г

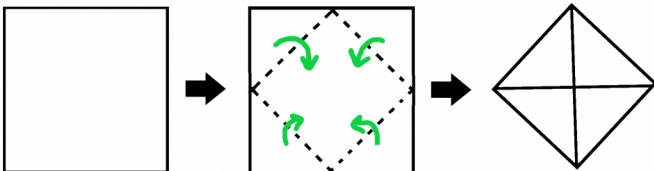
Ответ: В. (Для удобства расставим числа на часах против часовой стрелки.)



В 3:50 минутная стрелка должна указывать на 10, а часовая должна быть между 3 и 4 ближе к 4. Так стрелки расположены только на картинке В.)

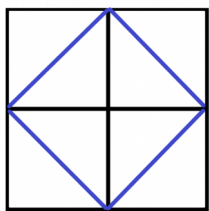
2. У ПрограМиши есть квадратный лист бумаги со стороной 8 см. ПрограМиша загнул все уголки листа к центру, не накладывая их друг на друга, как показано на картинке. В результате у него получился новый квадрат поменьше. Чему равна его площадь?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую) - площадь в квадратных сантиметрах.



Ответ: 32. (Разобьём исходный квадрат на 4 равные части - это 4 равных квадрата со сторонами 4 см. Каждый уголок - это половина квадрата со стороной 4 см.)

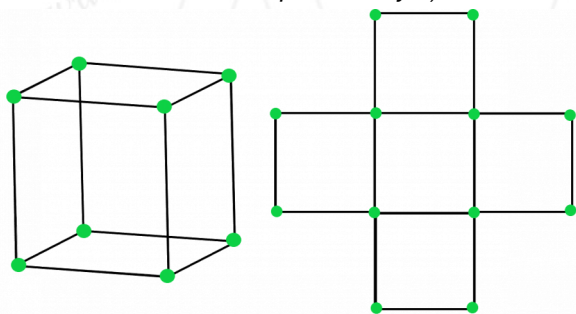




Так как площадь квадрата со стороной 4 см равна 16 кв.см, то площадь "уголка" - его половины - равна 8 кв.см. Площадь нового квадрата равна площади четырёх уголков, то есть 32 кв.см.)

3. ПрограМиша мастерит кубики из спичек и шариков пластилина (как на картинке слева). Сколько спичек ему понадобится, чтобы смастерить фигурку из пяти кубиков, которая спереди выглядит так, как показано на картинке справа?

Замечание: Для каждого ребра фигурки используется только одна спичка. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 44. (На картинке видны 16 спичек, эти спички находятся на передней части фигурки. Столько же спичек находится на задней части фигурки. Также из каждого шарика пластилина, изображенного на картинке справа, выходит ещё одна спичка, соединяющая переднюю и заднюю часть фигурки. Таких спичек, как и шариков пластилина, 12. Итого получается $16+16+12=44$ спички.)

4. На кошачьем чемпионате в Котополесе определили победителей в номинациях "Самый пушистый", "Самый шустрый" и "Самый ленивый". Ими оказались коты Пушок, Снежок и Дружок. Самый пушистый кот всегда говорит правду, самый ленивый всегда лжёт, а самый шустрый может и лгать, и говорить правду. Пушок и Снежок сказали: "Я самый шустрый". А Дружок сказал: "Пушок пушистей самого ленивого из нас." Кто из котов в какой номинации победил?

- Пушок - самый пушистый;
- Пушок - самый шустрый;
- Пушок - самый ленивый;
- Снежок - самый пушистый;
- Снежок - самый шустрый;





- Снежок - самый ленивый;
- Дружок - самый пушистый;
- Дружок - самый шустрый;
- Дружок - самый ленивый.

Ответ: Пушок - самый шустрый; Снежок - самый ленивый; Дружок - самый пушистый. (Самый пушистый кот всегда говорит правду, он не мог сказать "Я самый шустрый". Значит, Пушок и Снежок не самые пушистые, а самый пушистый - Дружок.

Значит, Дружок всегда говорит правду. А Дружок сказал: "Пушок пушистей самого ленивого из нас." Это правда, значит, Пушок не самый ленивый. Получается, что самый ленивый - Снежок, а самый шустрый - Пушок.)

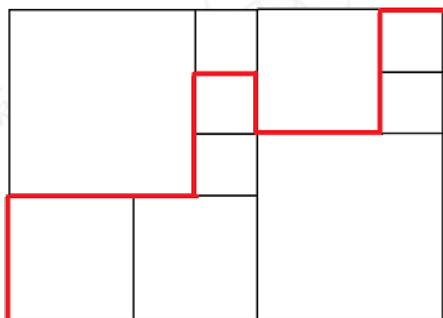
5. МатеМаша зашифровала пример $M+A+T+E+M+A+T+I+K+A$, в котором одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, а разные - разным. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 72. (Различных букв зашифровано шесть: М, А, Т, Е, И, К. Чтобы сумма получилась наибольшей, каждая буква должна принимать одно из значений 9, 8, 7, 6, 5, 4. Буква А входит в сумму 3 раза, буква М - 2 раза, Т - 2 раза, остальные буквы - по 1 разу. Значит, сумма будет наибольшей в случае, если $A=9$, М и Т равны 8 и 7, а буквы И, К, Е равны 6, 5, 4 (в любом порядке). Наибольшая сумма равна $9+9+9+8+8+7+7+6+5+4=72$.)

6. Прямоугольник разбит на квадраты. Внутри прямоугольника провели красную линию, длина которой равна 28 сантиметрам. Сколько сантиметров составляет длина этого прямоугольника?

Замечание: Длина - это большая сторона прямоугольника. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 14. (Ясно, что все маленькие квадраты одинакового размера. Будем всё считать в сторонах маленьких квадратов.





У верхнего среднего квадрата сторона равна 2-м сторонам маленького квадрата.

Сторона большого квадрата в левом верхнем углу равна 3-м сторонам маленького квадрата. А сторона большого квадрата в правом нижнем углу равна сумме длин сторон среднего и маленького квадрата, то есть $2+1=3$ сторонам маленького квадрата. Получаем, что два больших квадрата одинаковые, и у обоих длины сторон - это 3 стороны маленького квадрата.

Остались средние квадраты в нижнем ряду. Они одинаковые. При этом у них сторона - это разность стороны большого квадрата и маленького квадрата, то есть $3-1=2$ стороны маленького квадрата.

Получается, что все средние квадраты тоже одинаковые.

Посчитаем длину красной линии в сторонах маленького квадрата: она равна $2+3+1+1+1+1+2+1+1+1=14$ длин. И эта сумма равна 28 сантиметров. Значит, сторона одного маленького квадрата - 2 см (14 раз по 2 - это 28).

А значит, длина прямоугольника равна $(2+2+2)+2+(2+2)+2=14$ сантиметров.)

7. Найдите наименьшее натуральное число, у которого при умножении суммы цифр на произведение цифр получается 2023. Сколько цифр в этом числе?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 283. (Выясним, у каких чисел при умножении суммы цифр на произведение цифр получается 2023. Разложим 2023 на простые множители: $2023=17*17*7$. Из этих множителей только 7 может быть цифрой числа. Значит, либо это число только из единиц (2023 штуки), либо это число из одной цифры 7 и единиц. Во втором случае сумма цифр должна получиться 289, то есть единиц должно быть $289-7=282$.

Наименьшее подходящее число - это число, в котором сначала стоят 282 единицы, а в конце цифра 7 - всего $282+1=283$ цифры.)

8. У ПрограМиши есть бревно равной цилиндрической формы. Длина бревна - полметра, а радиус торцевой окружности - 10 см. На покраску одного торцевого круга у ПрограМиши ушло 30 граммов краски. Сколько граммов краски уйдет у ПрограМиши на покраску всей оставшейся поверхности бревна?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 330. (Посчитаем площадь торцевого круга. Она вычисляется по формуле πR^2 , где R - радиус круга. То есть площадь торцевого круга бревна равна $\pi * 10^2 = 100\pi$ кв.см. На эти 100π кв.см ушло 30 г краски.





Посчитаем площадь поверхности, которую ещё осталось покрасить. Она состоит из второго круга на другом конце бревна и боковой поверхности. Второй круг такой же, как и первый - его площадь $100 \cdot \pi$ кв.см. Площадь боковой поверхности - это площадь прямоугольника, у которого одна сторона - это длина окружности, а другая - длина бревна. То есть стороны прямоугольника - это 50 см и $2 \cdot 10 \cdot \pi = 20 \cdot \pi$ см. Площадь такого прямоугольника равна $50 \cdot 20 \cdot \pi = 1000 \cdot \pi$ кв.см. Значит, площадь непокрашенной части равна $100 \cdot \pi + 1000 \cdot \pi = 1100 \cdot \pi$ кв.см, на неё нужно $11 \cdot 30 = 330$ г краски.)

9. Четыре прожорливых хомяка ели горох. Пока первый хомяк съедает 3 горошины, второй успевает съесть 4. Пока второй хомяк съедает 6 горошин, третий успевает съесть 5. А пока третий съедает 6 горошин, четвёртый успевает съесть 7 горошин. Всего хомяки съели 256 горошин, одновременно начав и закончив поедание. Сколько горошин съел за это время первый хомяк?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 54. (Если за время, пока первый хомяк съедает 3 горошины, второй успевает съесть 4, то за время, когда второй съест $4+4+4=12$ горошин, первый съест $3+3+3=9$ горошин. Тогда пока второй успевает съесть $6+6=12$ горошин, третий съест $5+5=10$ горошин.

Итак, первые три хомяка за одно и то же время съедают соответственно 9, 12 и 10 горошин.

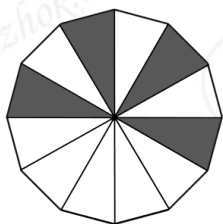
Про 4-го хомяка известно, что он съедает 7 горошин за то же время, что третий - 6 горошин. Увеличим все числа 9, 12 и 10 в 3 раза: первые три хомяка за одно и то же время съедают соответственно 27, 36 и 30 горошин. Теперь 30 делится на 6, то есть пока третий хомяк съедает $6 \cdot 5 = 30$ горошин, четвёртый успевает съесть $7 \cdot 5 = 35$ горошин.

Получается, что все 4 хомяка за одно и то же время съедают соответственно 27, 36, 30 и 35 горошин - в сумме это получается $27+36+30+35=128$ горошин. А 256 - это 2 раза по 128. Значит, всё время первый хомяк съел $27+27=54$ горошины.)

10. ПрограМиша взял правильный двенадцатиугольник и разрезал его на 12 одинаковых треугольников. Из этих треугольников 4 он покрасил в серый цвет, а остальные оставил белыми. Теперь ПрограМиша складывает треугольники так, чтобы они снова образовали правильный двенадцатиугольник. Сколько всего различных по раскраске двенадцатиугольников может сложить ПрограМиша?

Замечание: Двенадцатиугольники, которые отличаются только поворотом, считаем одинаковыми, а симметричные друг другу - разными. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).





Ответ: 43. (Отдельно посчитаем варианты, когда есть хотя бы 3 соседних серых треугольника. Тогда остаётся 9 вариантов, где расположить оставшийся серый треугольник. Но варианты, когда этот треугольник расположен рядом справа от трёх исходных и рядом слева, одинаковые с точностью до поворота. Поэтому различных вариантов 8.

Теперь рассмотрим варианты, когда только два серых треугольника расположены рядом. Третий треугольник можно расположить в любом месте, но не рядом с исходными двумя треугольниками (потому что эти варианты мы уже посчитали ранее), то есть остаётся 8 вариантов. Для каждого из этих вариантов есть 7 способов расположить последний треугольник. Получается $8 \cdot 7 = 56$ способов. Но здесь мы учли каждый вариант дважды, (варианты, отличающиеся только заменой третьего треугольника на четвертый и четвертого на третий). То есть получается 28 вариантов. Но теперь заметим, что некоторые из этих вариантов одинаковые с точностью до поворота. Пронумеруем треугольники по кругу так, что исходные два серых треугольника имеют номера 1 и 12. Тогда положение оставшихся двух серых треугольников на местах 3, 4 - такое же как положение на местах 9, 10 с точностью до поворота. Также положение оставшихся двух серых треугольников на местах 4, 5 - такое же, как положение 8, 9 с точностью до поворота. И положение двух оставшихся серых треугольников на местах 5, 6 - такое же, как положение 7, 8 с точностью до поворота. То есть среди 28 вариантов, 3 варианта повторяются, то есть различных вариантов 25.

Теперь будем считать только варианты, когда между серыми треугольниками есть белые треугольники. Между соседними серыми треугольниками могут быть такие количества белых треугольников (их сумма всегда должна быть 8, количество в каждом промежутке от 1 до 5):

- 1, 1, 1, 5 (циклические перестановки "5, 1, 1, 1", "1, 5, 1, 1", "1, 1, 5, 1" дадут такой же двенадцатиугольник с точностью до поворота)
- 1, 1, 2, 4 (аналогично все циклические перестановки могут быть получены поворотом)
- 1, 1, 4, 2
- 1, 2, 1, 4
- 1, 1, 3, 3
- 1, 3, 1, 3
- 2, 2, 1, 3
- 2, 2, 3, 1
- 2, 3, 2, 1
- 2, 2, 2, 2

Получается, 10 вариантов. Итого $10 + 25 + 8 = 43$ различных двенадцатиугольников.)

