



Биатлон - Группа 6+ - решения

1. За 60 сданных крышечек от бутылок дарят саженец лапчатки, а за 80 крышечек - саженец спиреи. МатеМаша хочет получить несколько одинаковых саженцев, но пока не решила, какого вида. Какое наименьшее (ненулевое) число крышечек ей нужно накопить, чтобы их можно было без остатка обменять на саженцы любого из этих двух видов?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 240. (Нужно найти наименьшее натуральное число, делящее и на 60, и на 80 - их НОК, число 240.)

2. Ленинградская атомная электростанция выдаёт мощность 4336 МВт. Ветряк может максимально выдавать мощность 2 МВт. Усть-Илимская гидроэлектростанция вырабатывает 3840 МВт. Сколько ветряков нужно поставить, чтобы их суммарная максимальная мощность вместе с гидроэлектростанцией была равна мощности атомной электростанции?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 248. (Мощность гидроэлектростанции на $4336-3840=496$ МВт меньше мощности атомной электростанции. Чтобы выработать 496 МВт, потребуется $496:2=248$ ветряков.)

3. Самолет во время полета сжигает топливо и выбрасывает углекислый газ в атмосферу. Количество выброшенного углекислого газа называют углеродным следом. Суперджет 100 выбрасывает 0,015 тонн углекислого газа на каждые 100 километров полёта и 0,08 тонн суммарно во время взлёта и посадки. ИЛ-96 выбрасывает 0,01 тонну углекислого газа на каждые 100 километров полёта и 0,1 тонну суммарно во время взлёта и посадки. ТУ-214 выбрасывает 0,02 тонны углекислого газа на каждые 100 километров полёта и 0,05 тонн суммарно во время взлёта и посадки. От Санкт-Петербурга до Казани 1200 км. Какой из самолетов оставит наименьший углеродный след от полёта Санкт-Петербург - Казань?

Замечание: В задаче приведены значения, которые могут отличаться от реальных характеристик самолетов.

- Суперджет 100;
- ИЛ-96;
- ТУ-214.

Ответ: ИЛ-96. (От Санкт-Петербурга до Казани 1200 км - это 12 сотен километров. Посчитаем углеродный след для каждого самолета:

*Суперджет 100: $0,08+0,015*12=0,26$ тонн.*

*ИЛ-96: $0,1+0,01*12=0,22$ тонн.*





ТУ-214: $0,05+0,02*12=0,29$ тонн.

Таким образом, наименьший углеродный след оставит ИЛ-96.)

4. С января по декабрь 2022 года МатеМаша каждый месяц сдавала макулатуру. Причём в каждый следующий месяц она сдавала на 2 кг больше, чем в предыдущий. Всего за год МатеМаша сдала 180 кг макулатуры. Сколько килограммов макулатуры она сдала в декабре 2022 года?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 26. (Пусть в январе МатеМаша сдала X кг макулатуры. Тогда в феврале $X+2$ кг, в марте $X+4$ кг, в апреле $X+6$ кг, в мае $X+8$ кг, в июне $X+10$ кг, в июле $X+12$ кг, в августе $X+14$ кг, в сентябре $X+16$ кг, в октябре $X+18$ кг, в ноябре $X+20$ кг и в декабре $X+22$ кг. Итого в сумме за год она сдала $12*X+132=180$ кг макулатуры. Таким образом, $12*X=48$, то есть $X=4$ кг - столько макулатуры МатеМаша сдала в январе. Значит, в декабре МатеМаша сдала $4+22=26$ кг макулатуры.)

5. Аня, Дина, Саша и Лёша весь год сдавали вторсырьё и получали зелёные баллы. Все они по итогу года получили различное количество баллов.

Аня сказала: "Я получила больше баллов, чем Лёша".

Дина сказала: "Я получила меньше баллов, чем Лёша, и больше, чем Аня".

Саша сказал: "Я получил меньше баллов, чем Дина, и у неё не больше всех баллов".

Лёша сказал: "Саша получил больше баллов, чем Аня".

Кто из ребят получил меньше всего баллов, если трое сказали правду, а один ошибся?

- Аня;
- Дина;
- Саша;
- Лёша.

Ответ: Аня. (Заметим, что из фразы Дины следует, что Лёша получил больше баллов, чем Аня. А Аня утверждает обратное. Значит, фразы Ани и Дины не могут быть обе правдой, то есть ошиблась одна из этих девочек. Значит, Саша и Лёша точно правы. А значит, Саша получил меньше баллов, чем Дина, Дина получила не больше всех, а Саша получил баллов больше, чем Аня. Это можно записать так:

$A < C < D < ?$

Остался только Лёша - его запишем на месте знака вопроса:

$A < C < D < ?$

Итак, меньше всех баллов получила Аня.)



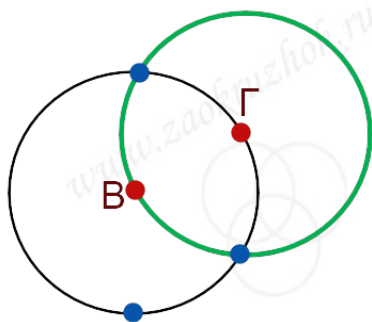


6. На участке посадили 10 саженцев: одну грушу, одну вишню, одну сливу, остальные - яблони. Оказалось, что от вишни на расстоянии ровно 3 метра посажено ровно 4 саженца, в том числе груша. От сливы на расстоянии ровно 3 метра тоже посажено ровно 4 саженца, в том числе груша. Какое наибольшее число саженцев может быть на расстоянии ровно 3 метра от груши?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

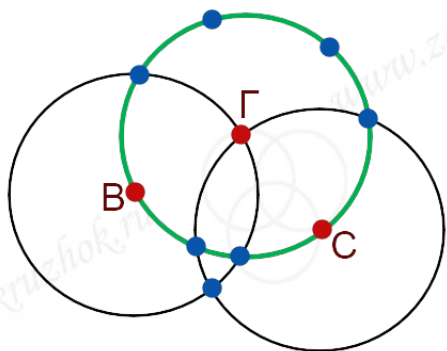
Ответ: 8. (Выясним, какое наибольшее число саженцев может оказаться на расстоянии 3 метра от груши, то есть на окружности радиуса 3 метра с центром в месте посадки груши (изобразим эту окружность зелёным цветом). Ясно, что вишня и слива точно окажутся на расстоянии 3 метра от груши, то есть будут на этой окружности.

Посмотрим на окружность радиуса 3 метра с центром в вишне:



По условию, на этой окружности находится ровно 4 саженца: груша (красная точка) и ещё 3 саженца (синие точки). Так как окружности пересекаются максимум в двух точках, то хотя бы одна из синих точек не окажется на зелёной окружности. Значит, на зелёной окружности точно не будет самой груши и минимум ещё одного саженца.

А вот все остальные 8 саженцев могут на ней оказаться. Например, так:



Значит, максимальное количество саженцев на расстоянии 3м от груши - это 8.)

7. В результате аварии на море по поверхности воды растеклось пятно нефти. Баржа "Спрут" может собрать всю растёкшуюся нефть за 6 часов, а баржа "Осьминог" могла бы собрать всю нефть за 10 часов. За какое время растёкшуюся нефть могут собрать обе эти баржи, работая вместе?





Замечание: В ответе укажите время в формате «ЧЧ:ММ» (например, 1 час 15 минут запишите как 01:15).

Ответ: 03:45. (Условно разделим нефтяное пятно на 30 равных частей (число 30 делится и на 6, и на 10). Поскольку баржа "Спрут" может собрать всё пятно за 6 часов, то она собирает по $30:6=5$ частей в час. Баржа "Осьминог" может собрать пятно за 10 часов, то есть собирает по $30:10=3$ части в час. Значит, обе баржи, работая вместе, будут собирать по $5+3=8$ частей пятна в час.

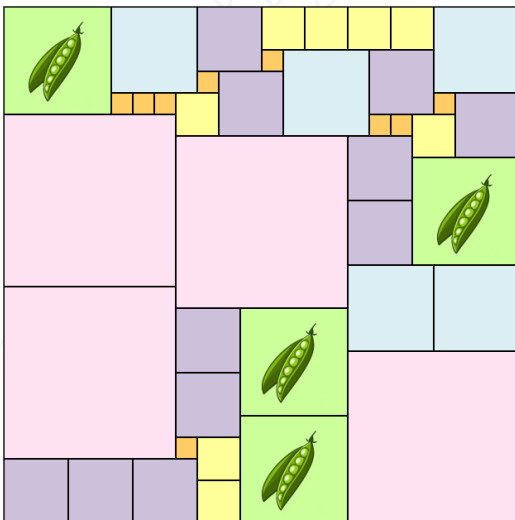
Значит, 24 части они соберут за 3 часа.

Останется ещё $30-24=6$ частей. Поскольку 8 частей они убирают за час, то две части - за $60:4=15$ минут. Значит, на 6 частей понадобится $15 \cdot 3=45$ минут.

Итого на уборку всего пятна понадобится 3 часа 45 минут.)

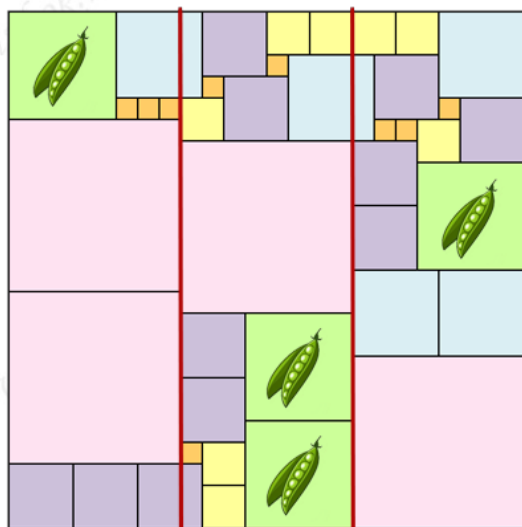
8. Квадратный участок 72 метра на 72 метра разделен на небольшие квадратные участки. Участки одинакового размера покрашены на схеме в один цвет. Под горох отвели все участки зелёного цвета. Сколько квадратных метров засеяно горохом?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

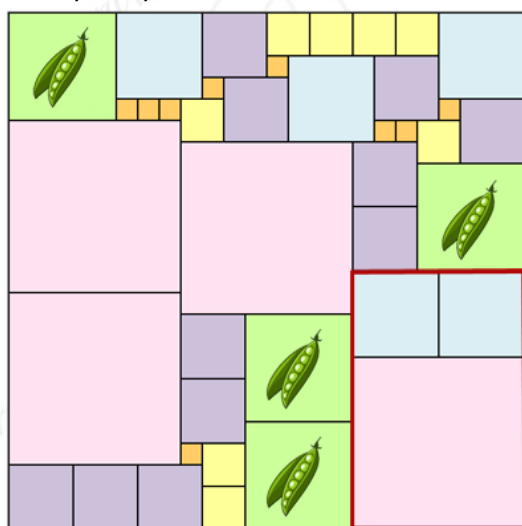


Ответ: 900. (Три стороны розовых квадратов составляют сторону всего поля. Значит, сторона розового квадрата равна $72:3=24$ м.





Две стороны голубых квадратов составляют сторону розового квадрата. Значит, сторона голубого квадрата равна $24:2=12$ м.



Сумма длин сторон фиолетового и оранжевого квадратов равна длине стороны голубого квадрата, то есть 12 м.

А 4 длины жёлтого квадрата равны сумме длин голубого, фиолетового и оранжевого квадратов, то есть $12+12=24$ м. Значит, сторона жёлтого квадрата равна $24:4=6$ м.



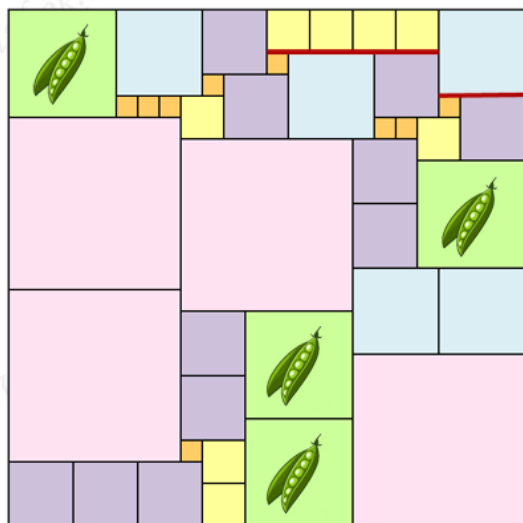


ЗАОЧНЫЙ КРУЖОК по математике

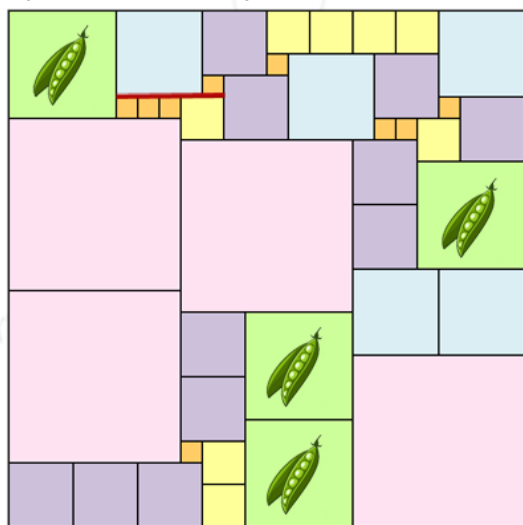
при Санкт-Петербургском Губернаторском
физико-математическом лицее N30



Биатлон - Группа 6+

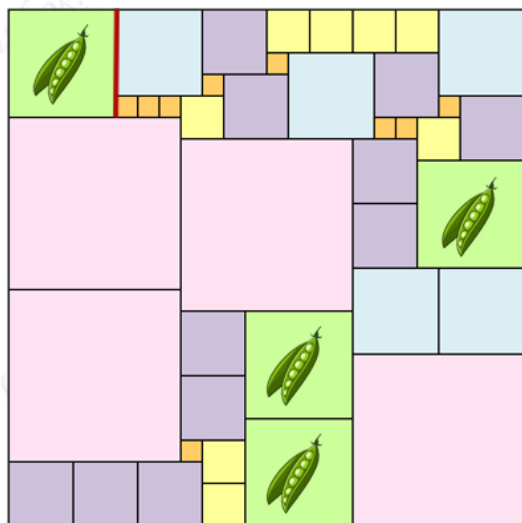


Сумма длин сторон голубого и одного оранжевого квадрата такая же, как и сумма длин сторон одного жёлтого и 3-х оранжевых квадратов. Значит, сумма длин сторон жёлтого квадрата (6 м) и 2-х оранжевых квадратов равна длине стороны голубого квадрата (12 м). Значит, две стороны оранжевого квадрата - это $12 - 6 = 6$ м, а одна сторона оранжевого квадрата равна $6 : 2 = 3$ м.



А сторона зелёного квадрата состоит из одной стороны голубого квадрата и одной стороны оранжевого.





Значит, сторона зелёного квадрата равна $12+3=15$ м, а его площадь равна $15*15=225$ кв.м.
Под горох отведено 4 таких квадрата, то есть общая площадь равна $225*4=900$ кв.м.)

9. В зоопарке живёт 33 обезьянки. У каждой обезьянки не более двух подружек-обезьянок. Оказавшись в одном вольере, две обезьянки-подружки начинают галдеть и нарушать покой других жителей зоопарка (если в вольере подружек нет, обезьянки ведут себя тихо). Какое наименьшее количество вольеров для обезьянок необходимо директору зоопарка, чтобы обеспечить тишину и покой для всех животных?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 3. (Двух вольеров может не хватить. Если среди обезьянок есть три таких, кто дружат между собой, то их нельзя посадить ни в один, ни в два вольера.

А вот трёх вольеров всегда хватит. Всех обезьянок можно разделить на несколько групп так, чтобы обезьянки из разных групп не дружили между собой. Покажем, как это сделать.

Сначала в одну группу выделим всех обезьянок, у которых нет ни одной подружки - этих обезьянок можно посадить в любую из клеток, они ни с кем не будут галдеть. Посадим их сразу в клетку №3, например.

Если обезьянок после этого не осталось, то задача решена, и клеток хватило. Пусть обезьянки все-таки остались.

Рассмотрим оставшихся обезьянок - у каждой из них есть хотя бы одна подружка (тех, у кого подружек нет, мы уже выделили в отдельную группу). Оставшихся обезьянок тоже разобьём на группы.

Возьмём одну какую-то обезьянку и скажем ей взять за руки всех своих подружек - поскольку у каждой обезьянки не более двух подружек, то рук хватит. Итак, пока получилась цепочка из двух или трёх обезьянок. Теперь крайних обезьянок спросим, есть ли у них ещё подружки. Если есть, то не более, чем по одной - одну подружку они уже держат за руку. Попросим и их взять за руку





оставшуюся подружку (если подружек больше нет, то с этой стороны к цепочке никто не присоединится). И так будем делать до тех пор, пока цепочка не "завершится", то есть к ней некого будет добавить.

Как может произойти "завершение" цепочки: либо с обеих сторон окажутся обезьянки, у которых больше нет подружек, либо две крайние обезьянки дружат друг с другом - тогда цепочка превратится в "кольцо". Итак, у нас получилась вторая группа: обезьянки, которые держатся за руки и образуют цепочку. Если после этого обезьянок не осталось, то завершим деление на группы.

Если обезьянки еще остались, то снова возьмём одну обезьянку, которая пока не попала ни в какую группу, и, начиная с неё, сделаем ещё одну группу - цепочку или кольцо, где подружки держатся за руки. Будем так делать, пока все обезьянки не окажутся в какой-то группе.

Итак, теперь все обезьянки разбились на цепочки, и будем рассаживать их по клеткам.

Возьмём сначала все цепочки, которые не замкнулись в кольцо - из каждой такой цепочки всех "нечётных" обезьянок (то есть 1-ю, 3-ю, 5-ю и т.д.) посадим в клетку №1, а всех "чётных" - в клетку №2. Поскольку обезьянки, стоящие через одну, не подружки, то они будут сидеть в одной клетке тихо. Обезьянок из разных цепочек тоже можно посадить вместе - они тоже не дружат и будут вести себя тихо.

Итак, остались только обезьянки, у которых цепочка замкнулась в кольцо. Возьмём кольцо и одну обезьянку посадим в клетку №3 - туда, где сидят обезьянки, у которых нет подружек. Теперь кольцо разомкнулось, и крайние обезьянки не дружат друг с другом. Теперь с этой цепочкой можно поступить так же, как и со всеми незамкнутыми цепочками - "нечётных" обезьянок посадить в клетку №1, а "чётных" - в клетку №2. И так же сделать с всеми остальными кольцами.

Теперь все обезьянки рассажены в три клетки, и ни в одной клетке нет подружек.)

10. В городке Чистяково 96 активистов занимаются сбором пяти видов вторсырья: бумага, картон, пластик, стекло и металл. Там готовится акция, на которой вторсырьё можно будет обменять на саженцы. Каждый вид вторсырья есть ровно у половины всех активистов. Активист придёт на акцию, если у него есть хотя бы 3 вида вторсырья. Какое максимальное число активистов можно ожидать на акции?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 80. (Пусть на акцию пришло X активистов. Для удобства будем считать, что каждый активист принёс все свои виды вторсырья в отдельных контейнерах.

*Рассмотрим общее число контейнеров, принесённых на акцию. С одной стороны, каждый вид вторсырья есть ровно у $96:2=48$ активистов. А значит, общее число контейнеров равно $48*5=240$ (так как всего 5 видов вторсырья). С другой стороны, каждый пришедший на акцию принёс контейнеры хотя бы с тремя видами вторсырья, то есть минимум 3 контейнера. Следовательно, общее число контейнеров не меньше чем $3*X$. Таким образом, 240 не меньше чем $3*X$. Значит, X*





не больше чем $240:3=80$. Получается, что активистов придёт не более 80.

Приведём пример, когда на на акцию придёт ровно 80 активистов. Выберем среди активистов 80 человек и разобьём их на 5 групп по 16 человек.

Пусть контейнеры с бумагой есть у людей из первых трёх групп, с картоном – у людей из второй, третьей и четвёртой групп, с пластиком – у людей из третьей, четвёртой и пятой групп, со стеклом – у людей из четвёртой, пятой и первой групп, а с металлом – у людей из пятой, первой и второй групп. Тогда вторсырьё каждого вида есть ровно у $16+16+16=48$ человек, а на акцию придут как раз выбранные нами 80 человек.)

