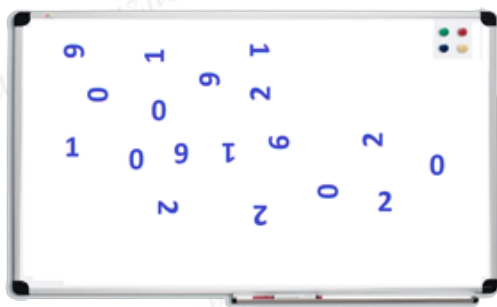




Заключительная Олимпиада - группа 5+ - решения

1. Учительница закрепила цифры на магнитной доске и дала задание: ребята по очереди подходят к доске и составляют из цифр число 2019. При этом они не берут цифры из уже составленных чисел. Сколько ребят смогут составить нужное число?

В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 4. (Посчитаем, сколько цифр каждого вида висит на доске. Двойка встречается 5 раз, ноль - 5 раз, единица - 4 раза, девятка - 4 раза. Значит, число 2019 смогут составить только 4 ученика. Цифры 2 и 0 остаются лишними.)

2. В инкубаторе было 20 яиц. Из некоторых вылупились цыплята, а из остальных — черепашки. Цыплячьих лапок оказалось вдвое больше, чем черепашьих. Сколько вылупилось цыплят?

У цыпленка две лапки, у черепашки — четыре. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 16. (У одной черепашки лапок столько же, сколько у двух цыплят. Раз цыплячьих лапок в 2 раза больше, то самих цыплят больше в 4 раза. Действительно, чтобы цыплячьих ног было вдвое больше, нужно, чтобы на каждую черепашку (4 ноги) приходилось по 4 цыпленка (8 ног). Значит, всех вылупившихся малышей можно разделить на группы: одна черепашка и 4 цыпленка. В каждой группе 5 детёнышей, а всего было 20 яиц. Значит, таких групп будет 4. То есть всего 4 черепашки и $4+4+4+4=16$ цыплят.

Значит, из 20 яиц вылупилось 16 цыплят и 4 черепашки.)

3. Маша, Саша и Даша живут в одном доме и каждый день ездят в школу на самокатах. От дома до школы 5 километров. Маша проезжает весь путь за 15 минут. Саше требуется в два раза больше времени. А Даша доезжает быстрее Саши, но медленнее Маши. Какая скорость (из перечисленных) может быть у Даши?

18 км/ч;

20 км/ч;





ЗАОЧНЫЙ КРУЖОК по математике

при Санкт-Петербургском Губернаторском
физико-математическом лицее №30

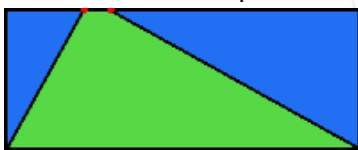


- 14 км/ч;
- 10 км/ч;
- 23 км/ч.

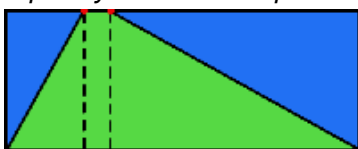
Ответ: 14 км/ч, 18 км/ч. (Маша проезжает 5 километров за 15 минут, значит, за час она бы проехала $5+5+5+5=20$ километров и её скорость равна 20 км/ч. Саша тратит на путь 30 минут, значит, за час проезжает $5+5=10$ километров. То есть скорость Саши - 10 км/ч. Так как скорость Даши больше, чем у Саши, но меньше, чем у Маши, то возможные варианты скорости — 14 км/ч и 18 км/ч.)

4. МатеМаша начертила прямоугольник и отметила на верхней стороне две красные точки в двух случайно выбранных местах. Потом МатеМаша соединила левую красную точку с левой нижней вершиной, а правую – с правой нижней вершиной. Таким образом прямоугольник оказался разделен на три части. Две крайние части МатеМаша раскрасила синим цветом, а среднюю часть зелёным. Какой краски на рисунке больше: синей или зелёной?

- Синей;
- зелёной;
- поровну;
- это зависит от расположения красных точек на верхней стороне.



Ответ: зелёной. (Проведем из красных точек две пунктирные линии, которые разделят большой прямоугольник на три маленьких прямоугольника.)



Получилось, что левый прямоугольник разделён диагональю ровно пополам, поэтому в нём синего и зелёного цвета поровну. То же самое и в левом прямоугольнике. Значит, в двух крайних прямоугольниках синего и зелёного цвета одинаково. А поскольку средний прямоугольник полностью зелёный, то зелёного цвета больше.)

5. ПрограМиша и МатеМаша играют в шахматы. Сейчас на доске белых фигур в три раза меньше, чем чёрных. Причём чёрных фигур на доске в четыре раза меньше, чем свободных клеток. Сколько на доске чёрных фигур?



В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 12. (На доске есть белые фигуры, есть чёрные и есть свободные клетки. Всего клеток на доске 64.)

Изобразим условие в виде схемы. Белых фигур меньше всего - количество клеток, которые они занимают, изобразим в виде маленького отрезка. Чёрных фигур в три раза больше - количество клеток, занятых чёрными фигурами, изобразим отрезком, который в три раза длиннее, то есть состоит из трёх маленьких отрезков. Осталось изобразить количество свободных клеток. Их в четыре раза больше, чем чёрных фигур, то есть отрезок должен быть в 4 раза длиннее - он будет состоять из 12 маленьких отрезков.



Значит, 64 клетки доски надо разделить на $12+3+1=16$ равных частей: $64:16=4$. Значит, один маленький отрезок состоит из 4 клеток с белыми фигурами. А чёрных фигур в три раза больше, то есть 12.)

6. В "Школе Непосед" 13 учеников. Перед экзаменом по прилежности преподаватель посадил учеников в круг и попросил всех предположить, кто сдаст экзамен. Каждый непоседа постеснялся высказаться про себя и двух своих соседей. Зато про всех остальных каждый сказал: «Никто из них не сдаст!» После экзамена оказалось, что угадали только прилежные непоседы - те, которые сдали экзамен. А все остальные ошиблись. Сколько непосед сдали экзамен?

В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 2. (Предположим, что никто не сдал экзамен. Тогда высказывание каждого непоседы истинно (все остальные действительно не сдали экзамен). Но это противоречит условию - непоседы, которые не сдали экзамен, должны ошибиться.)

Значит, хотя бы один из учеников сдал экзамен. Назовём его А. Он сказал правду, поэтому никто, кроме его соседей, экзамен не сдал.

Теперь выясним, могли ли его соседи сдать экзамен. Назовём соседей Б и В. Допустим, оба соседа не сдали экзамен. Тогда сказанное ими утверждение «Никто из них не сдаст!» истинно (так как для Б все, кроме него самого и двух соседей - это те же ученики, про которых говорил А, да ещё В. То есть действительно, все они не сдали экзамен. Аналогично с В). Но так как они не сдали экзамен, то они должны ошибаться - противоречие. Пусть оба соседа сдали экзамен. Тогда сказанное ими утверждение «Никто из них не сдаст!» ложно (так как для Б все, кроме него самого и двух соседей - это те же ученики, про которых говорил А, да ещё В. Те, про кого говорил А, действительно не сдали экзамен, но В - сдал. Значит, утверждение ложно. Аналогично с В).

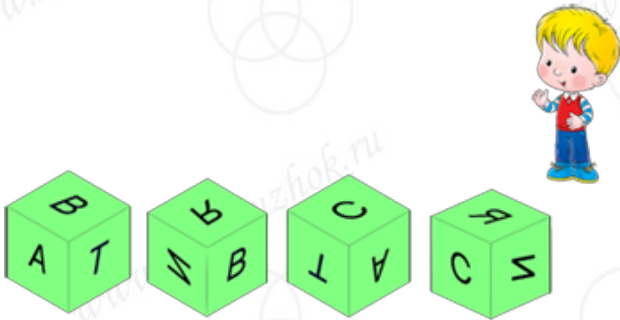




Значит, только один из соседей мог сдать экзамен успешно. Действительно, в этом случае его высказывание истинно, а высказывание второго соседа – ложно. (Получается, что могли сдать экзамен только двое.)

7. У мальчика есть 4 одинаковых кубика с буквами на сторонах. Он поставил перед собой их так, что буквы на сторонах перед ним образовали его имя. Как зовут мальчика?

В ответе напишите одно слово - имя мальчика.



Ответ: ВИТЯ. (Определим расположение букв на кубике друг относительно друга. Затем определим, какие буквы видит мальчик. Все кубики одинаковые, всего у кубика 6 граней. Нам нужно расположить на гранях шесть букв: В, А, Т, Я, И, С.

Рассмотрим первый и второй кубики: из них видим, что напротив буквы В не могут быть буквы А, Т, Я, И. Остаётся только буква С, значит, она расположена напротив В.

Рассмотрим второй и четвёртый кубики: из них видим, что напротив буквы Я не могут быть буквы И, С, В. Остаются буквы А и Т. Но если посмотреть на первый и второй кубики, то по расположению букв А и Я относительно буквы В видно, что именно буква А расположена напротив буквы Я. Остались буквы И и Т, они тоже расположены друг напротив друга.

Мальчик видит буквы, расположенные напротив букв С, Т, И, А. Это, соответственно, буквы В, И, Т, Я. Таким образом, он видит имя ВИТЯ.)

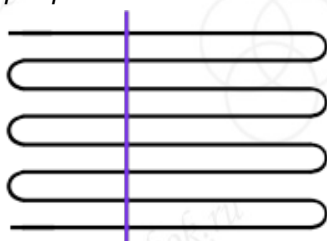
8. У МатеМаши есть длинная ленточка. МатеМаша сложила её пополам, после этого двойную ленту снова сложила пополам и затем ещё раз пополам. Получившуюся короткую сложенную ленту она разрежала одним разрезом точно поперёк ленты. Когда лента распалась на кусочки, два из получившихся кусочков оказались длиной 2 и 6 сантиметров. Какая наибольшая длина могла быть у первоначальной ленточки?

В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 56. (Когда МатеМаша первый раз сложила ленточку пополам, получилось 2 слоя. После второго складывания получилось 4 слоя, а после третьего складывания получилось 8 слоёв. При этом все 8 слоёв ленточки одинаковой длины. Изобразим схематично сложенную ленточку и



разрез.



Покрасим кусочки, которые получились после разрезания, разными цветами:

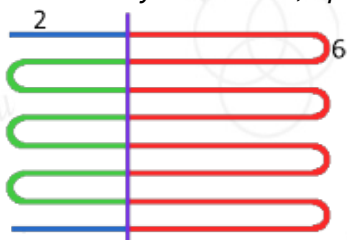


При этом кусочки, покрашенные в один цвет, одинаковые по длине.

Значит, осталось разобрать все возможные варианты, какие два кусочка имеют длины 2 см и 6 см.

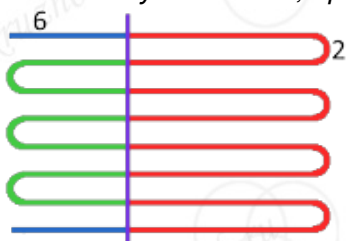
Синий и зелёный кусочки не могут иметь длины 2 см и 6 см, потому что зелёный кусочек равен по длине двум синим. Значит, эти две длины могут быть либо у синего и красного, либо у зелёного и красного кусочков. Разберём все эти варианты.

1. Синий кусочек 2 см, красный 6 см.



В этом случае один слой состоит из участка в 2 см и половины от 6 см, то есть имеет длину $2+3=5$ см. А вся ленточка (то есть все 8 слоёв) имеют длину $5+5+5+5+5+5+5+5=40$ см.

2. Синий кусочек 6 см, красный 2 см.



В этом случае один слой состоит из участка в 6 см и половины от 2 см, то есть имеет длину $6+1=7$ см. А вся ленточка (то есть все 8 слоёв) имеет длину $7+7+7+7+7+7+7+7=56$ см.

3. Зелёный кусочек 2 см, красный 6 см.





В этом случае один слой состоит из участка половины от 2 см и половины от 6 см, то есть имеет длину $1+3=4$ см. А вся ленточка (то есть все 8 слоёв) имеет длину 32 см.

4. Зелёный кусочек 6 см, красный 2 см.

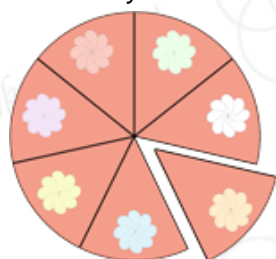


В этом случае один слой состоит из участка половины от 6 см и половины от 2 см, то есть имеет длину $3+1=4$ см. А вся ленточка (то есть все 8 слоёв) тоже имеет длину 32 см.

Итого, самая большая длина получилась во втором случае - 56 см.)

9. МатеМаша пригласила в гости 6 подружек. Она сделала торт и разрежала его на 7 кусочков (по кусочку себе и каждой из подружек). На каждом кусочке - одна розочка из крема, причём все 7 розочек разного цвета (то есть кусочки не одинаковые). Когда гости пришли, и девочки вместе с МатеМашей сели за круглый стол, МатеМаша начала раскладывать кусочки торта по тарелкам. МатеМаша раскладывает кусочки так: сначала выбирает и кладёт один кусочек себе, а дальше каждый раз берёт какой-то кусочек "с краю" (то есть рядом с которым есть пустое место) и раскладывает кусочки девочкам по кругу по часовой стрелке. Сколькими способами можно таким образом раздать кусочки девочкам?

В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 224. (Первый кусок для себя МатеМаша может выбрать 7-ю способами - любой из семи кусков. Для каждого такого варианта у неё два варианта выбрать следующий кусок - справа или слева от образовавшейся "дырки". Значит, выбрать два первых куска $7*2=14$ способов. Для



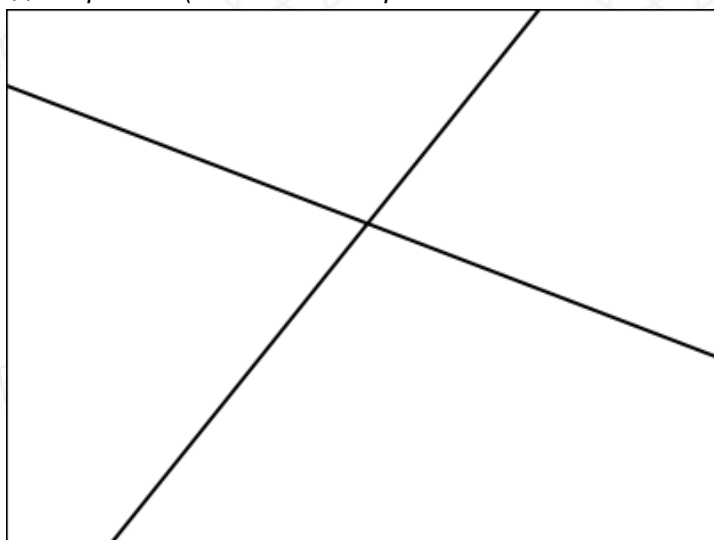


каждой комбинации из первых двух кусков снова два варианта выбрать следующий кусок - с правого или левого края от остатка. Получается $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$ способов выбрать первые 3 куска. Поскольку каждый раз МатеМаша берёт один из крайних кусков от остатка, то оставшиеся куски всегда лежат вместе. Значит, всегда, пока остаётся хотя бы 2 куска, будет два варианта взять следующий кусок - с одного или с другого края от остатка. Значит, 5 раз будет по 2 варианта выбора. А последний кусок можно взять только одним способом. Значит, всего вариантов раздать куски торта $7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 224$.)

10. ПрограМиша провёл на листе бумаги несколько красных, несколько синих и несколько зелёных линий. Каждая линия прямая и идёт от края до края листа. Каждая линия пересекает все остальные линии (точки пересечения тоже находятся в пределах листа, причём не на краю). При этом через каждую точку пересечения проходят только 2 линии. Если разрезать лист по красным линиям, то получится 4 части. Если разрезать лист по синим линиям, то получится тоже 4 части. А если по зелёным, получится 7 частей. Сколько частей получится, если разрезать лист по всем цветным линиям?

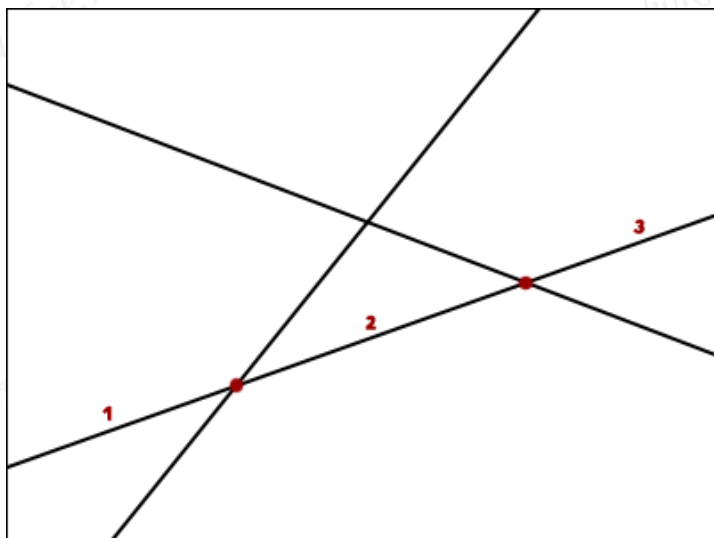
В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 29. (Будем пока считать, что все прямые одинаковые - чёрного цвета. Будем выяснять, на сколько частей делится лист бумаги этими прямыми. Сначала возьмём одну прямую, потом две, потом три, и так будем добавлять по одной прямой и смотреть, сколько добавляется частей листа. Итак, если взять одну прямую (любую из имеющихся), то она разделит лист на 2 части. Если взять две прямые (а остальные прямые пока считать "невидимыми"), то частей получится 4.

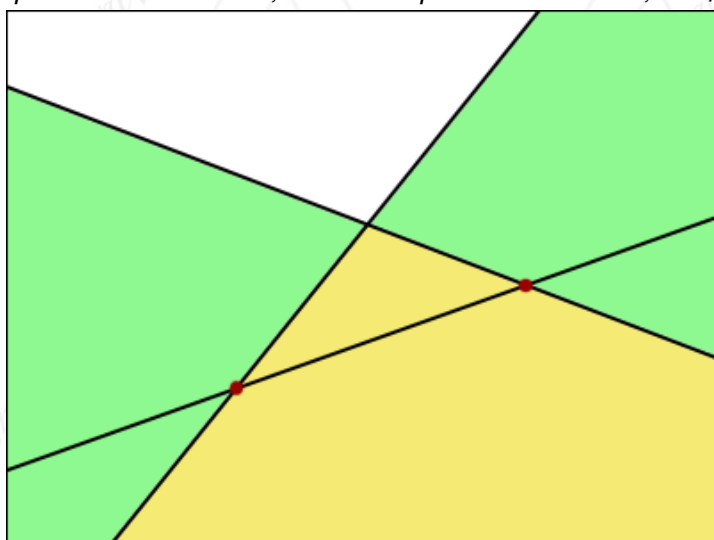


Если добавить к ним третью прямую (любую из имеющихся), то, по условию, она пересечёт каждую из первых двух, причём в разных точках. Значит, если отметить на третьей прямой эти две точки пересечения, то прямая будет разделена на 3 участка.

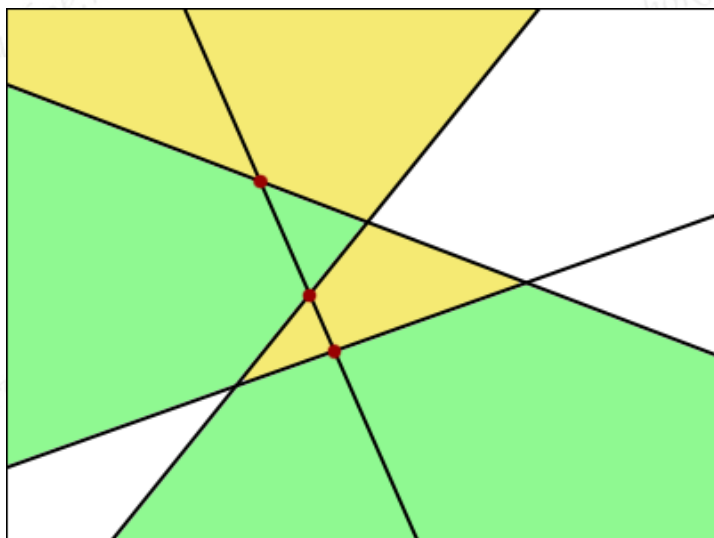




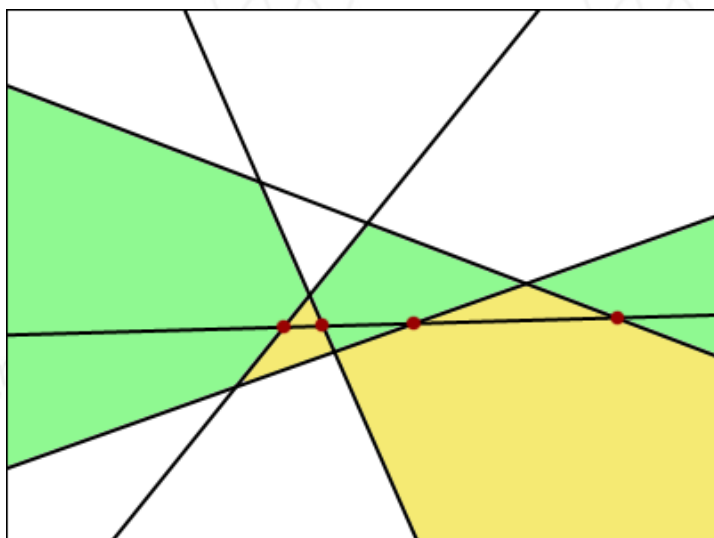
Каждый из этих участков пересекает какую-то одну часть листа на две. Значит, третья прямая пересекает не все 4, а только три части. Значит, общее число частей увеличится на 3 и будет $4+3=7$.



Итак, три прямые делят лист на 7 частей. Если добавить к ним четвёртую прямую, то она также будет иметь 3 точки пересечения - с каждой из первых трёх прямых, то есть разбивается на 4 участка. Каждый участок прямой пересекает один кусок листа на две части, то есть добавляется 4 части. Итого, 4 прямые разделят плоскость на $7+4=11$ частей.



Если добавить пятую прямую, то на ней будет 4 точки пересечения и пять участков. То есть она "заденет" 5 частей листа, рассечёт каждую надвое и добавит к общему количеству 5 частей. Всего частей станет $11+5=16$.



Добавив шестую прямую, мы увеличим количество частей на 6. То есть всего станет $16+6=22$ части. Седьмая прямая добавит 7 новых частей, и всего станет $22+7=29$ частей. И так далее.

Поскольку красные линии делят лист на 4 части, то красных линий 2. Синих линий тоже 2. А зелёные линии делят лист на 7 частей, то есть их 3. Значит, всего линий на листе $2+2+3=7$. Как мы уже выяснили, 7 прямых линий делят лист на 29 частей.)

