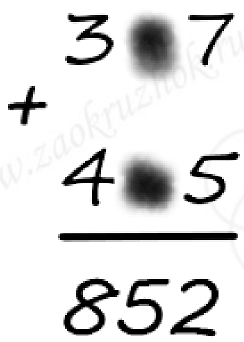
Заключительная_Олимпиада - группа 5+ - решения

1. ПрограМиша написал на доске пример, но две цифры стёрлись. Чему равна сумма стёртых цифр?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 14. (Сумма цифр в разряде единиц 7+5=12 - единица переходит в разряд десятков. Сумма цифр в разряде сотен 3+4=7, но в примере получается 8. Значит, единица (то есть 10 десятков) перешла из разряда десятков. Значит, сумма стёртых цифр равна 5+10-1=14.)

2. ПрограМиша весит столько же, сколько МатеМаша и кошка Муся вместе. МатеМаша весит на 6 килограммов меньше, чем ПрограМиша и кошка Муся вместе. Сколько весит кошка Муся?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 3. (Если поставить на левую чашу весов ПрограМишу, а на правую МатеМашу и кошку, то весы будут в равновесии.
Если с правой чаши весов убрать кошку, то левая чаша окажется тяжелее правой чаши на одну кошку. А если теперь эту кошку поставить на левую чашу, то левая чаша окажется тяжелее правой чаши ещё на одну кошку, то есть на две кошки.
Но теперь на левой чаше оказались ПрограМиша с кошкой, а на правой - МатеМаша. А по условию, МатеМаша на 6 килограммов легче, чем ПрограМиша с кошкой. Значит, две кошки Муси весили бы 6 килограммов. То есть кошка весит 3 килограмма.)

3. В пяти коробках было поровну конфет. Из каждой коробки съели по 8 конфет. Всего конфет осталось столько, сколько их было вначале в трёх коробках. Сколько конфет было изначально в одной коробке?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 20. (Всего съели 8+8+8+8+8=40 конфет. И это столько, сколько было в 5-3=2 коробках. Значит, в одной коробке было 20 конфет.)

4. В очередь друг за другом встали 3 рыцаря и 6 лжецов. Каждый в очереди сказал: «Рядом со мной стоят только лжецы». На каких местах стояли рыцари?

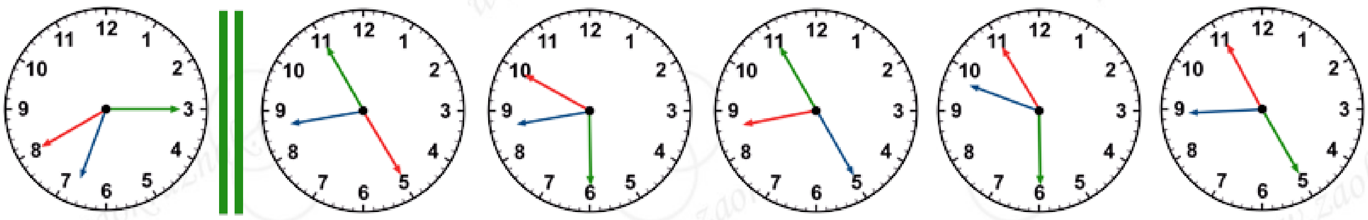
Замечание: Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

☐ 1;
☐ 2;
☐ 3;
☐ 4;
☐ 5;
☐ 6;
☐ 7;
☐ 8;
☐ 9.

Ответ: 2, 5, 8. (Будем кратко записывать: Р - рыцарь, Л - лжец.
Рыцарей всего трое. Значит, схематично всех стоящих в очереди можно записать так:
(группа лжецов)Р(группа лжецов)Р(группа лжецов)Р(группа лжецов).
Три лжеца подряд стоять не могут - иначе получится, что средний лжец сказал правду. Значит, в каждой группе не более 2-х лжецов. Но в крайней группе не может быть и 2-х лжецов - иначе крайний лжец сказал бы правду. Значит, схематично всех стоящих в очереди можно записать так: (не более 1 Л)Р(не более 2 Л)Р(не более 2 Л)Р(не более 1 Л).
Значит, всего лжецов не более, чем 1+2+2+1=6. Но так как всего ровно 6 лжецов, то в группах их должно быть ровно 1, 2, 2, 1. То есть очередь такая: ЛРЛЛРЛЛРЛ.)

5. У МатеМаши есть необычные часы с тремя стрелками: часовой, минутной и секундной. Все стрелки одинаковой длины, но разного цвета. МатеМаша не помнит, какая из стрелок какого цвета. Когда МатеМаша в первый раз посмотрела на часы, стрелки были расположены, как на левой картинке. Как будут расположены стрелки через 2 часа 15 минут 10 секунд после этого?

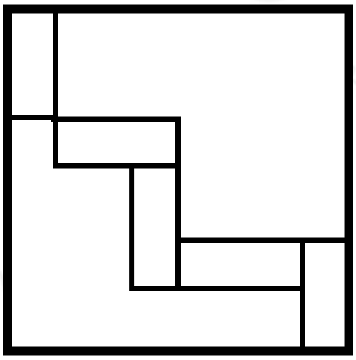
☐ А;
☐ Б;
☐ В;
☐ Г;
☐ Д.



А Б В Г Д

Ответ: Д. (Определим по исходным часам, какая стрелка какого цвета. Красная стрелка показывает ровно на 8 (или очень близко к 8), а зелёная - ровно на 3 (или тоже очень близко к этому). Если бы часовая стрелка была красной или зелёной, то минутная стрелка должна была бы показывать ровно на 12 (или близко к этому). Но ни одна стрелка не находится близко к 12-ти. Значит, часовой может быть только синяя стрелка.
Определим теперь цвета минутной и секундной стрелок. Так как часовая стрелка находится между 6 и 7, но ближе к числу 7, то минутная стрелка должна показывать больше, чем 30 минут. Значит, красная стрелка - минутная, а зелёная - секундная.
Значит, левые часы показывают 6 часов 40 минут 15 секунд.
Значит, через 2 часа 15 минут 10 секунд будет 8 часов 55 минут 25 секунд.
То есть часовая (синяя) стрелка будет между 8 и 9, минутная (красная) будет показывать на 11, а секундная (зелёная) будет показывать на 5.)

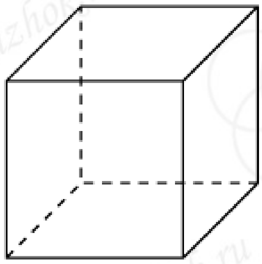
6. МатеМаша нарисовала квадрат, а в нём пять одинаковых прямоугольников. Сторона квадрата 24 сантиметра. Чему равна меньшая сторона прямоугольника?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



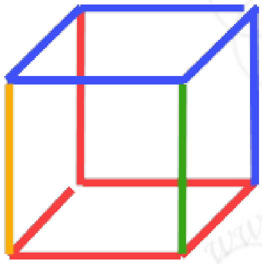
Ответ: 4. (Обозначим: Д - длина прямоугольника, Ш - ширина прямоугольника. Тогда горизонтальная сторона квадрата равна Ш+Д+Д+Ш=2Д+2Ш - это равно 24 см.
А вертикальная сторона квадрата равна Д+Ш+Д+(Д-Ш)=3Д - это тоже равно 24 см.
*Получаем, что Д=24:3=8 см. Значит, 2Ш=24-2*8=8 см, то есть Ш=4 см.)*

7. У ПрограМиши есть один кусок проволоки длиной 12 см. ПрограМиша хочет сделать из него каркас кубика с ребром 1 см. Какое наименьшее число разрезов проволоки ему придётся сделать?
Замечание: Каркас кубика - это конструкция только из рёбер кубика. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 3. (У кубика будет 12 рёбер по 1 см.



Поскольку длина проволоки тоже 12 см, то делать участки в несколько слоёв проволоки ПрограМиша не сможет. Значит, ему нужно сделать каркас так, чтобы проволока везде была в один слой.
Из каждой вершины куба выходит 3 ребра. Два из них могут быть продолжениями друг друга, то есть частями одного куска проволоки. Но в каждой вершине хотя бы одно из рёбер должно быть концом какого-то куска проволоки. Всего у куба 8 вершин, то есть концов проволоки должно получиться не меньше 8-ми. Значит, нужно разрезать проволоку минимум на 4 куска. Значит, нужно сделать минимум 3 разреза.
А из 4-х кусков проволоки сделать каркас куба можно. Например, так:



)

8. Сколько способов расставить на полке 5 томов Пушкина (с первого по пятый), если четвёртый и пятый тома не должны стоять рядом?
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 72. (Сначала просто посчитаем способы расставить 5 томов без ограничения. Потом вычтем из них те способы, когда тома 4 и 5 стоят рядом.
*Выбрать том на первое место 5 способов, на второе - 4, на третье - 3, на четвёртое - 2, на пятое - 1. Всего способов расстановки 5*4*3*2*1=120.*
Посчитаем, сколько способов расставить тома так, чтобы 4-й 5-й стояли рядом.
*Соединим тома 4 и 5 вместе - пусть это пока будет сначала 4, потом 5. Будем их расставлять с остальными томами как единое целое. Тогда у нас есть 4 места и 4 объекта: 1 том, 2 том, 3 том, 4+5 тома. Выбрать объект на первое место 4 способа, на второе место - 3 способа, на третье - 2 способа, на четвёртое - 1 способ. Значит, всего расставить 4 объекта 4*3*2*1=24 способа.*
Столько же способов получится, если соединить тома 4 и 5 с другом порядке: 5+4.

Итого способов 24+24=48.
Вычтем это из 120: 120-48=72 способа расставить 5 томов, чтобы 4-й и 5-й не были рядом.)

9. ПрограМиша выбрал несколько различных натуральных чисел. Произведение двух самых маленьких из них равно 27, а произведение двух самых больших равно 441. Чему равна сумма всех выбранных чисел?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

*Ответ: 61. (441=21*21=3*7*3*7. Посмотрим, как можно представить 441 в виде произведения двух различных чисел: 441=1*441=3*147=7*63=9*49.*
*Теперь посмотрим, как можно представить 27: 27=1*27=3*9.*
Если два самых маленьких числа - это 1 и 27, то 441 не может получиться как произведение двух самых больших (у числа 441 нет разложения на два множителя, оба из которых больше или равны 27).
Значит, два самых маленьких числа - это 3 и 9. Тогда двумя самыми большими числами могут быть только 9 и 49 (во всех остальных разложениях на множители числа 441 присутствует число меньше чем 9).
То есть выбраны числа - это 3, 9 и 49, и их сумма равняется 61.)

10. По клеткам доски 12x12 прыгают кузнечики. Каждую секунду все кузнечики перепрыгивают на соседнюю по стороне клетку. Причём каждый кузнечик всегда прыгает в одну и ту же сторону, пока не дойдёт до края доски, а после этого начинает прыгать в противоположную сторону. Изначально все кузнечики находились в разных клетках. За минуту никакие два кузнечика не встретились на одной клетке (“встречи” в воздухе не считаются встречами). Какое максимальное количество кузнечиков могло находиться на доске?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 48. (Каждый кузнечик двигается в одном направлении и разворачивается, доходя до края доски. Значит, каждый кузнечик всегда остаётся на своей линии на доске (вертикали или горизонтали). Кузнечиков, которые двигаются по вертикальным линиям, будем называть вертикальными кузнечиками, а тех, которые двигаются по горизонталям - горизонтальными.
Ясно, что кузнечики, которые находятся на двух разных горизонталях, точно не могут встретиться - каждый прыгает по своей горизонтали. То же и с двумя вертикальными кузнечиками на двух разных вертикалях.
Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Посмотрим, сколько кузнечиков могут двигаться по одной линии. Рассмотрим какую-то горизонталь на этой доске. По ней могут прыгать вправо/влево 2 кузнечика, которые изначально находились на клетках разных цветов, и они ни разу не

встретятся на одной клетке (после каждого прыжка оба меняют цвет клетки, то есть они всегда находятся на клетках разных цветов). Если же на горизонтали есть хотя бы 2 кузнечика, которые прыгают вправо/влево по клеткам одного цвета, то они обязательно встретятся.Значит, 3 кузнечика не могут прыгать по этой горизонтали. Аналогично с кузнечиками, прыгающими вверх/вниз по какой-то вертикали.

*Получаем, что на каждой вертикали могут прыгать вверх/вниз не более 2 кузнечиков и на каждой горизонтали могут прыгать вправо/влево не больше 2 кузнечиков. То есть кузнечиков не может быть больше, чем 2*12+2*12=48.*

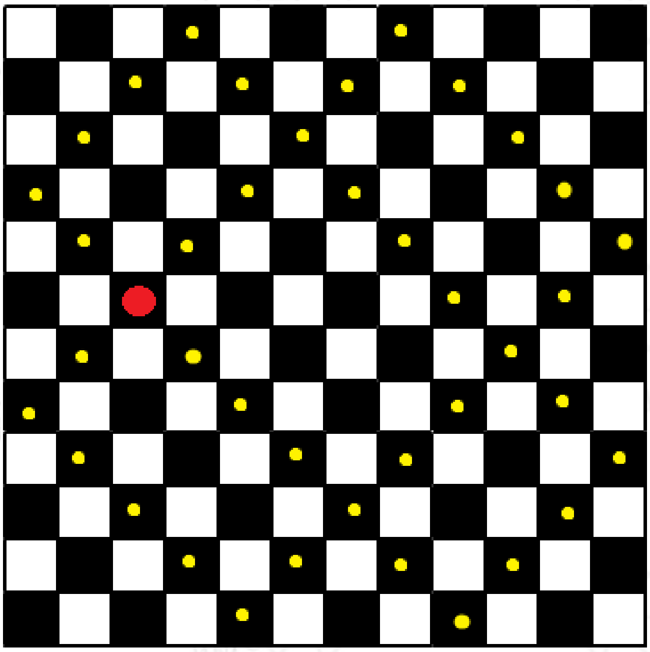
Покажем, как могут быть расположены 48 кузнечиков, чтобы условия задачи выполнялись. Кузнечики, которые изначально находились на чёрных клетках (1 вид кузнечиков), никогда не встретятся с кузнечиками, которые изначально находились на белых клетках (2 вид кузнечиков). Значит, пока можно расположить на доске кузнечиков, например, только 1-го вида (потом по аналогии расположим и кузнечиков 2-го вида). Итак, сначала будем располагать на доске кузнечиков только на чёрных клетках.

Если два кузнечика точно не могут встретиться, будет говорить, что они не мешают друг другу.

Кузнечики, которые двигаются по параллельным линиям, точно не мешают друг другу.

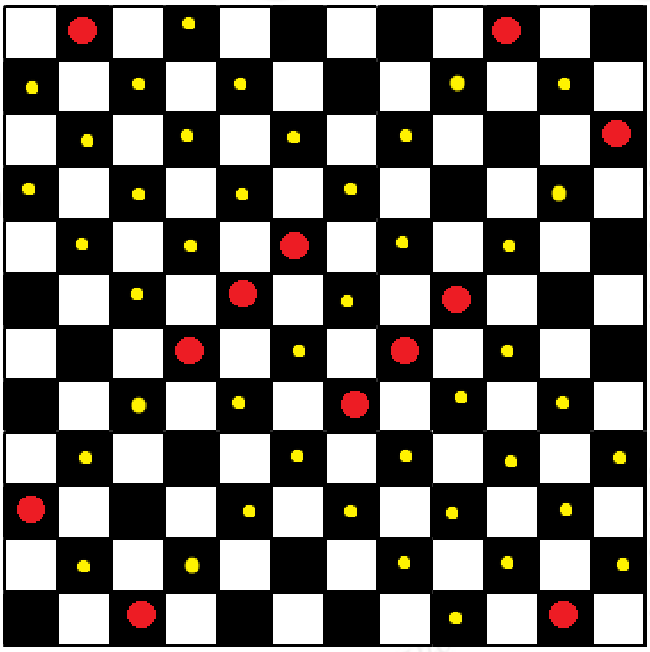
Посмотрим, в каком случае могут встретиться горизонтальный кузнечик с вертикальным.

Разместим в случайную клетку вертикального кузнечика (красный кружок) и отметим, в каких клетках могут находиться горизонтальные кузнечики, которые могут с ним встретиться. Отметим эти “опасные” клетки жёлтыми точками. Для этого рассмотрим каждую клетку вертикали, сосчитаем, сколько прыжков до этой клетки может сделать красный кузнечик, и отсчитаем столько же прыжков от этой клетки по горизонтали.



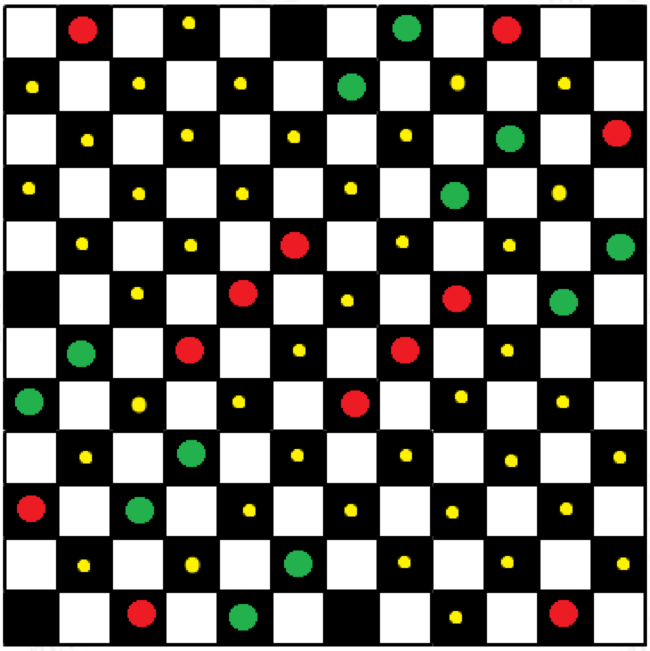
Получается, что “опасные” клетки для выбранного кузнечика - это две диагонали, проходящие через клетку с кузнечиком, а также “продолжения” этих диагоналей после “отражений” от края *доски. То есть в общем случае “опасные” клетки расположены в виде двух прямоугольников, полученных из двух диагоналей (в некоторых случаях прямоугольники будут совпадать или превращаться в линию).*

Теперь разместим 12 вертикальных кузнечиков, например, так (красные кружочки):



Поскольку все они на разных вертикалях, то друг другу они мешать не будут. Отметим жёлтыми точками клетки, которые оказались “опасными” - туда не будем ставить горизонтальных кузнечиков.

Теперь в каждый горизонтальный ряд в свободные (“безопасные”) чёрные клетки поставим по одному горизонтальному кузнечику - например, так (зеленые кружочки):



Итак, мы поставили 12+12=24 кузнечика на чёрные клетки, и эти кузнечики гарантированно не будут встречаться друг с другом. Теперь можно поставить ещё 24 кузнечика на белые клетки - например, сделать симметричную расстановку. Кузнечики на белых клетках тоже не будут встречаться друг с другом и гарантированно не будут встречаться с кузнечиками, поставленными на чёрные клетки.

То есть можно расположить 48 кузнечиков.)